



Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Modul Belajar Mandiri

CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)

Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)

Bidang Studi

**Pendidikan Guru
Sekolah Dasar -
Matematika**





Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Modul Belajar Mandiri

CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)

Bidang Studi
Pendidikan Guru
Sekolah Dasar -
Matematika



MODUL BELAJAR MANDIRI CALON GURU

**Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja
(PPPK)**

**Bidang Studi
Pendidikan Guru Sekolah Dasar -
Matematika**

Penulis :
Tim GTK DIKDAS

Desain Grafis dan Ilustrasi :
Tim Desain Grafis

Copyright © 2021
Direktorat GTK Pendidikan Dasar
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Dilarang mengopi sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial
tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar peserta didik. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter Pancasila yang prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen utama dalam pendidikan sehingga menjadi fokus perhatian Pemerintah maupun Pemerintah Daerah dalam seleksi Guru Aparatur Sipil Negara (ASN) Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kontrak (PPPK).

Seleksi Guru ASN PPPK dibuka berdasarkan pada Data Pokok Pendidikan. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan mengestimasi bahwa kebutuhan guru di sekolah negeri mencapai satu juta guru (di luar guru PNS yang saat ini mengajar). Pembukaan seleksi untuk menjadi guru ASN PPPK adalah upaya menyediakan kesempatan yang adil bagi guru-guru honorer yang kompeten agar mendapatkan penghasilan yang layak. Pemerintah membuka kesempatan bagi: 1). Guru honorer di sekolah negeri dan swasta (termasuk guru eks-Tenaga Honorer Kategori dua yang belum pernah lulus seleksi menjadi PNS atau PPPK sebelumnya. 2). Guru yang terdaftar di Data Pokok Pendidikan; dan Lulusan Pendidikan Profesi Guru yang saat ini tidak mengajar.

Seleksi guru ASN PPPK kali ini berbeda dari tahun-tahun sebelumnya, dimana pada tahun sebelumnya formasi untuk guru ASN PPPK terbatas. Sedangkan pada tahun 2021 semua guru honorer dan lulusan PPG bisa mendaftar untuk mengikuti seleksi. Semua yang lulus seleksi akan menjadi guru ASN PPPK hingga batas satu juta guru. Oleh karenanya agar pemerintah bisa mencapai target satu juta guru, maka pemerintah pusat mengundang pemerintah daerah untuk mengajukan formasi lebih banyak sesuai kebutuhan.

Untuk mempersiapkan calon guru ASN PPPK siap dalam melaksanakan seleksi guru ASN PPPK, maka Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan (Ditjen GTK) mempersiapkan modul-modul pembelajaran setiap bidang studi yang digunakan sebagai bahan belajar mandiri, pemanfaatan komunitas pembelajaran menjadi

Modul Belajar Mandiri

hal yang sangat penting dalam belajar antara calon guru ASN PPPK secara mandiri. Modul akan disajikan dalam konsep pembelajaran mandiri menyajikan pembelajaran yang berfungsi sebagai bahan belajar untuk mengingatkan kembali substansi materi pada setiap bidang studi, modul yang dikembangkan bukanlah modul utama yang menjadi dasar atau satu-satunya sumber belajar dalam pelaksanaan seleksi calon guru ASN PPPK tetapi dapat dikombinasikan dengan sumber belajar lainnya. Peran Kemendikbud melalui Ditjen GTK dalam rangka meningkatkan kualitas lulusan guru ASN PPPK melalui pembelajaran yang bermuara pada peningkatan kualitas peserta didik adalah menyiapkan modul belajar mandiri.

Direktorat Guru dan Tenaga Kependidikan Pendidikan Dasar (Direktorat GTK Dikdas) bekerja sama dengan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) yang merupakan Unit Pelaksana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan modul belajar mandiri bagi calon guru ASN PPPK. Adapun modul belajar mandiri yang dikembangkan tersebut adalah modul yang di tulis oleh penulis dengan menggabungkan hasil kurasi dari modul Pendidikan Profesi Guru (PPG), Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB), Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP), dan bahan lainnya yang relevan. Dengan modul ini diharapkan calon guru ASN PPPK memiliki salah satu sumber dari banyaknya sumber yang tersedia dalam mempersiapkan seleksi Guru ASN PPPK.

Mari kita tingkatkan terus kemampuan dan profesionalisme dalam mewujudkan pelajar Pancasila.

Jakarta, Februari 2021

Direktur Jenderal Guru dan Tenaga
Kependidikan,



Iwan Syahril

Kata Pengantar

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT atas selesainya Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru Aparatur Sipil Negara (ASN) Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kontrak (PPPK) untuk 25 Bidang Studi (berjumlah 39 Modul). Modul ini merupakan salah satu bahan belajar mandiri yang dapat digunakan oleh calon guru ASN PPPK dan bukan bahan belajar yang utama.

Seleksi Guru ASN PPPK adalah upaya menyediakan kesempatan yang adil untuk guru-guru honorer yang kompeten dan profesional yang memiliki peran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar peserta didik. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter Pancasila yang prima.

Sebagai salah satu upaya untuk mendukung keberhasilan seleksi guru ASN PPPK, Direktorat Guru dan Tenaga Kependidikan Pendidikan Dasar pada tahun 2021 mengembangkan dan mengkurasi modul Pendidikan Profesi Guru (PPG), Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB), Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP), dan bahan lainnya yang relevan sebagai salah satu bahan belajar mandiri.

Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK ini diharapkan dapat menjadi salah satu bahan bacaan (bukan bacaan utama) untuk dapat meningkatkan pemahaman tentang kompetensi pedagogik dan profesional sesuai dengan bidang studinya masing-masing.

Terima kasih dan penghargaan yang tinggi disampaikan kepada pimpinan Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) yang telah mengizinkan stafnya dalam menyelesaikan Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK. Tidak lupa saya juga sampaikan terima kasih kepada para widyaiswara dan Pengembang Teknologi Pembelajaran (PTP) di dalam penyusunan modul ini.

Modul Belajar Mandiri

Semoga Modul Belajar Mandiri bagi Calon Guru ASN PPPK dapat memberikan dan mengingatkan pemahaman dan keterampilan sesuai dengan bidang studinya masing-masing.

Jakarta, Februari 2021

Direktur Guru dan Tenaga
Kependidikan Pendidikan Dasar,



Drs. Rachmadi Widdiharto, M. A
NIP. 196805211995121002

Daftar Isi

	hlm.
Kata Sambutan	i
Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	vii
Daftar Tabel	x
Daftar Diagram	x
Pendahuluan	11
A. Deskripsi Singkat Isi Modul	11
B. Peta Kompetensi	12
C. Ruang Lingkup	15
D. Petunjuk Belajar	16
Pembelajaran 1. Bilangan Asli, cacah, dan Bulat (ACB)	17
A. Kompetensi.....	17
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	17
C. Uraian Materi.....	17
1. Materi 1 Bilangan.....	17
2. Materi 2 Bilangan Bulat dan Operasi Hitung pada Bilangan Bulat	20
3. Materi 3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).....	30
D. Rangkuman	36
Pembelajaran 2. Bilangan Pecah (Pecahan)	39
A. Kompetensi.....	39
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	39
C. Uraian Materi.....	39
1. Materi 1 Bilangan Pecahan	39
2. Materi 2 Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan	42
3. Materi 3 Desimal dan Persen.....	48
4. Materi 4 Perbandingan, dan Skala.....	52
D. Rangkuman	59
Pembelajaran 3. Geometri	61
A. Kompetensi.....	61
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	61
C. Uraian Materi	61
1. Materi 1 Dasar-dasar Geometri.....	61
2. Materi 2 Segi Banyak (Poligon).....	69
3. Materi 3 Kekongruenan dan Kesebangunan	81

4. Materi 4 Bangun Ruang.....	88
D. Rangkuman.....	93
Pembelajaran 4. Pengukuran	97
A. Kompetensi	97
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	97
C. Uraian Materi	97
1. Materi 1: Panjang, Keliling, dan Luas Bangun Datar	97
2. Materi 2 Luas Permukaan dan Volume Bangun Ruang	114
3. Materi 3 Debit.....	127
4. Materi 4 Jarak, Waktu, dan Kecepatan	129
D. Rangkuman.....	133
Pembelajaran 5. Statistika dan Peluang	135
A. Kompetensi	135
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	135
C. Uraian Materi	136
1. Materi 1 Statistik, Statistika, dan Data.....	136
2. Materi 2 Penyajian Data	138
3. Materi 3 Distribusi Frekuensi	146
4. Materi 4 Distribusi Frekuensi Relatif.....	150
5. Materi 5 Ukuran Pemusatan Data	150
6. Materi 6 Ukuran Penyebaran Data.....	163
7. Materi 7 Nilai Baku.....	167
8. Materi 8 Kaidah Pencacahan	168
9. Materi 9 Peluang.....	177
D. Rangkuman.....	178
Pembelajaran 6. Kapita Selekta Matematika	181
A. Kompetensi	181
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	181
C. Uraian Materi	181
1. Materi 1 Logika Matematika	182
2. Materi 2 Pola, Barisan, dan Deret Bilangan	192
3. Materi 3 Persamaan Linear, Pertidaksamaan Linear, dan Grafik Fungsi Linear.....	200
4. Materi 4 Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat, dan Grafik Fungsi Kuadrat.....	208
5. Materi 5 Trigonometri.....	216
D. Rangkuman.....	221
Penutup.....	225
Daftar Pustaka.....	227

Daftar Gambar

	hlm.
Gambar 1 Garis bilangan himpunan bilangan bulat.....	20
Gambar 2 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat.....	21
Gambar 3 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat Positif dengan Positif, Negatif dengan Negatif dan Positif dengan Negatif	23
Gambar 4 Ilustrasi penjumlahan bilangan menggunakan garis bilangan.....	23
Gambar 5 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat positif.....	25
Gambar 6 Ilustrasi pengurangan bilangan melibatkan nilai tempat.....	25
Gambar 7 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat	26
Gambar 8 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan himpunan	27
Gambar 9 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan garis bilangan	27
Gambar 10 Ilustrasi Perkalian Bilangan Bulat Negatif	27
Gambar 11 Ilustrasi perkalian bilangan bulat negatif menggunakan himpunan.	28
Gambar 12 Ilustrasi pembagian 48 : 4	29
Gambar 13 Langkah-langkah Menentukan Faktor Prima dari suatu Bilangan....	31
Gambar 14 Langkah-langkah Menentukan Faktorisasi Prima dari suatu Bilangan	31
Gambar 15 ilustrasi bilangan 1 dan 14.....	40
Gambar 16 Ilustrasi Pecahan Bernilai 14.....	41
Gambar 17 Pecahan Campuran-1	42
Gambar 18 Pecahan Campuran-2	42
Gambar 19 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Pecahan Berpenyebut Sama	43
Gambar 20 Ilustrasi Penjumlahan Pecahan Berpenyebut Berbeda	43
Gambar 21 Ilustrasi Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Sama	44
Gambar 22 Ilustrasi Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Berbeda	45
Gambar 23 Ilustrasi Gambaran dari Soal Cerita	46
Gambar 24 Ilustrasi Perkalian Bilangan Pecahan Biasa	46
Gambar 25 Ilustrasi Perkalian Bilangan Pecahan Campuran	47
Gambar 26 Ilustrasi Pembagian Bilangan Pecahan dengan Bulat.....	47
Gambar 27 Ilustrasi Pembagian Bilangan Pecahan dengan Pecahan.....	48
Gambar 28 Ilustrasi Penjelasan Konsep Persen	52
Gambar 29 Ilustrasi 31 % dan 213 %.....	52
Gambar 30 Ilustrasi Perbandingan Panjang Benang.....	53
Gambar 31 Ilustrasi Perbandingan Menggunakan Manik-Manik.....	53
Gambar 32 Ilustrasi Pekerjaan yang Diselesaikan Masing-masing Orang	56
Gambar 33 Ilustrasi Pekerjaan yang Diselesaikan Secara Bersama-sama.....	56
Gambar 34 Titik.....	62
Gambar 35 Garis.....	62
Gambar 36 Sinar Garis	63
Gambar 37 Ruas Garis	63
Gambar 38 Garis Sejajar dan Berpotongan	63
Gambar 39 Garis Sejajar atau Aksioma Kesejajaran.....	63
Gambar 40 Bidang	64
Gambar 41 Ruang.....	64
Gambar 42 Daerah Sudut.....	64
Gambar 43 Dua Sudut Kongruen	65

Modul Belajar Mandiri

Gambar 44 Sudut Suplemen (Berpelurus).....	65
Gambar 45 Sudut Siku-Siku.....	66
Gambar 46 Sudut Komplemen.....	66
Gambar 47 Sudut Lancip	66
Gambar 48 Sudut Tumpul	67
Gambar 49 Sudut Bertolak Belakang	67
Gambar 50 Sudut-Sudut yang Dibentuk oleh Garis	67
Gambar 51 Kurva	69
Gambar 52 Segitiga.....	70
Gambar 53 Segitiga Sebarang.....	71
Gambar 54 Segitiga Sama Kaki.....	71
Gambar 55 Segitiga Sama Sisi	72
Gambar 56 Segitiga Lancip.....	72
Gambar 57 Segitiga Siku-Siku	72
Gambar 58 Segitiga Tumpul	73
Gambar 59 Garis Tinggi.....	73
Gambar 60 Garis Bagi.....	74
Gambar 61 Garis Berat	74
Gambar 62 Jumlah Besar Sudut pada Segitiga	75
Gambar 63 Segitiga Siku-Siku	75
Gambar 64 Jajargenjang	76
Gambar 65 Trapesium Siku-Siku	77
Gambar 66 Trapesium Sama Kaki.....	77
Gambar 67 Trapesium Sebarang.....	78
Gambar 68 Belah ketupat	78
Gambar 69 Layang-Layang.....	79
Gambar 70 Bagan Klasifikasi Segiempat Beraturan	80
Gambar 71 Lingkaran.....	81
Gambar 72 Unsur-Unsur Lingkaran	81
Gambar 73 Ilustrasi Persegi-Persegi Kongruen	82
Gambar 74 Dua Segitiga Sebangun (sisi – sisi – sisi).....	82
Gambar 75 Dua Segitiga Sebangun (Sisi – Sudut – Sisi)	83
Gambar 76 Dua Segitiga Sebangun (Sisi – Sudut – Sisi)	83
Gambar 77 Dua Segitiga Sebangun (Sudut – Sisi – Sudut)	83
Gambar 78 Dua Persegi Panjang Sebangun	84
Gambar 79 Dua Segitiga Sebangun	84
Gambar 80 Dua Segitiga Sebangun	85
Gambar 81 Trapesium yang Sebangun.....	85
Gambar 82 Unsur – Unsur Bangun Ruang.....	88
Gambar 83 Macam-Macam Prisma	89
Gambar 84 Macam – Macam Limas.....	90
Gambar 85 Bola.....	91
Gambar 86 Bagan Konversi Satuan Panjang.....	99
Gambar 87 Ilustrasi Hukum Kekekalan Panjang	100
Gambar 88 Bagan Konversi Satuan Luas	102
Gambar 89 Tangram	102
Gambar 90 Ilustrasi Luas Segitiga Berdasarkan Luas Persegi Panjang	106
Gambar 91 Ilustrasi Luas Segitiga	107
Gambar 92 Ilustrasi Luas Segitiga Tumpul.....	107
Gambar 93 Ilustrasi Luas Jajar genjang Berdasarkan Luas Segitiga	108

Gambar 94 Ilustrasi Luas Daerah Jajargenjang.....	109
Gambar 95 Ilustrasi Luas Daerah Belah Ketupat.....	110
Gambar 96 Luas Belah Ketupat	110
Gambar 97 Ilustrasi Luas Layang-Layang Berdasarkan Luas Segitiga	111
Gambar 98 Ilustrasi Luas Layang-Layang yang Dibentuk dari dua Segitiga	111
Gambar 99 Ilustrasi Luas Trapesium	112
Gambar 100 Ilustrasi Luas Daerah Lingkaran Berdasarkan Luas Persegi Panjang	113
Gambar 101 Ilustrasi Luas Lingkaran Berdasarkan Luas Jajargenjang.....	113
Gambar 102 Jaring-Jaring Kubus.....	114
Gambar 103 Jaring-Jaring Balok.....	115
Gambar 104 Luas Permukaan balok = $2 pl + 2 pt + 2 lt$	115
Gambar 105 Jaring-Jaring Prisma.....	116
Gambar 106 Jaring-Jaring Tabung.....	116
Gambar 107 Jaring-Jaring Limas	117
Gambar 108 Jaring-Jaring Kerucut	118
Gambar 109 Ilustrasi Luas Selimut Kerucut.....	118
Gambar 110 Bagan Konversi Satuan Volume	120
Gambar 111 Ilustrasi Volume Prisma.....	123
Gambar 112 Limas.....	124
Gambar 113 Ilustrasi Volume Kerucut Berdasarkan Volume Tabung.....	125
Gambar 114 Ilustrasi Volume Bola Berdasarkan Volume Tabung	126
Gambar 115 Bagan Konversi Satuan Berat	126

Daftar Tabel

	hlm.
Tabel 1 Target Kompetensi Guru P3K.....	12
Tabel 2 Peta Kompetensi Bahan Belajar Bidang Studi Matematika	13
Tabel 3 Keterkaitan Antar Segitiga	73
Tabel 4 Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Prisma	90
bel 5 Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Limas	91
Tabel 6 Keliling Lingkaran	101
Tabel 7 Rumus Luas Persegi Panjang	105
Tabel 8 Volume Bangun Kubus	121
Tabel 9 Volume Balok	122
Tabel 10 Banyak Siswa Kelas IV SD Cicarita Tahun Ajaran 2018/2019	139
Tabel 11 Jumlah Siswa di Wilayah RT 03 RW 14 Kelurahan Sukamandi menurut Jenjang Sekolah dan Jenis Kelamin Tahun Ajaran 2019/2020.....	140
Tabel 12 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju	140
Tabel 13 Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame	141
Tabel 14 Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020	142
Tabel 15 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil	143
Tabel 16 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020	143
Tabel 17 Data nilai matematika dari 80 siswa	147
Tabel 18 Distribusi Frekuensi Nilai Matematika.....	149
Tabel 19 Frekuensi Relatif Data Nilai Matematika Siswa.....	150
Tabel 20 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju	151
Tabel 21 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju	152
Tabel 22 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju	156
Tabel 23 Nilai Kelompok A dan Kelompok B	163

Daftar Diagram

	hlm.
Diagram 1 Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame.....	141
Diagram 2 Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil	142
Diagram 3 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil.....	143
Diagram 4 Banyak Siswa Laki-Laki SD Sukamaju	145
Diagram 5 Banyak Siswa Perempuan SD Sukamaju	145
Diagram 6 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil.....	146

Pendahuluan

A. Deskripsi Singkat Isi Modul

Kegiatan belajar ini pada modul ini menyajikan bahasan mengenai: (1) konsep bilangan asli, cacah, dan bulat atau ACB; (2) bilangan pecah atau pecahan; (3) geometri; (4) pengukuran; dan (5) statistika dan peluang serta (6) kapita selekta matematika. Secara rinci kegiatan belajar ini menyajikan rincian materi berikut ni.

Pada bilangan asli, cacah, dan bulat menyajikan tentang:

1. bilangan (konsep bilangan, sistem numerasi bilangan, macam-macam bilangan).
2. bilangan bulat (definisi dan operasi hitung pada bilangan bulat).
3. faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).

Pada bilangan pecah atau pecahan menyajikan tentang:

1. bilangan pecahan (definisi, operasi hitung pada bilangan pecahan serta pecahan desimal).
2. persen, perbandingan dan skala.

Pada geometri menyajikan tentang:

1. dasar-dasar geometri.
2. segi banyak (kurva, segitiga, segiempat dan lingkaran).
3. kesebangunan dan kekongruenan.
4. bangun ruang (prisma, limas, dan bola).

Pada pengukuran menyajikan tentang:

1. panjang, keliling, dan luas bangun datar (pengukuran panjang, keliling bangun datar, pengukuran luas, dan luas bangun datar).
2. luas permukaan dan volume (luas permukaan bangun ruang, pengukuran volume, dan volume bangun ruang).
3. debit (pengukuran waktu dan debit).
4. jarak, waktu, dan kecepatan.

Pada statistika dan peluang membahas tentang:

1. dasar–dasar statistika (statistik, statistika, dan data).
2. penyajian data (dalam bentuk tabel dan diagram).
3. distribusi frekuensi.
4. ukuran pemusatan data (*mean*, median, dan modus).
5. ukuran penyebaran data (*range*, kuartil, simpangan baku dan variansi).
6. nilai baku.
7. aturan perkalian.
8. permutasi dan kombinasi.
9. peluang.

Pada kapita selekta matematika membahas tentang:

1. logika matematika.
2. pola bilangan dan deret bilangan.
3. persamaan linear, pertidaksamaan linear dan grafik fungsi linear.
4. persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat dan grafik fungsi kuadrat.
5. trigonometri

B. Peta Kompetensi

Bahan belajar mandiri ini dikembangkan berdasarkan model kompetensi guru. Kompetensi tersebut dapat dijabarkan menjadi beberapa indikator. Target kompetensi menjadi patokan penguasaan kompetensi oleh guru P3K.

Kategori Penguasaan Pengetahuan Profesional yang terdapat pada dokumen model kompetensi yang akan dicapai oleh guru P3K ini dapat dilihat pada Tabel1.

Tabel 1 Target Kompetensi Guru P3K

KOMPETENSI	INDIKATOR
Menganalisis struktur & alur pengetahuan untuk pembelajaran	1. Menganalisis struktur & alur pengetahuan untuk pembelajaran
	2. Menganalisis prasyarat untuk menguasai konsep dari suatu disiplin ilmu
	3. Menjelaskan keterkaitan suatu konsep dengan konsep yang lain

Untuk menterjemahkan model kompetensi guru, maka dijabarkanlah target kompetensi guru bidang studi yang terangkum dalam pembelajaran-pembelajaran dan disajikan dalam bahan belajar mandiri bidang studi Matematika PGSD. Kompetensi guru bidang studi Matematika PGSD dapat dilihat pada tabel 2 berikut.

Tabel 2 Peta Kompetensi Bahan Belajar Bidang Studi Matematika

KOMPETENSI GURU	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
Pembelajaran 1. Konsep Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat atau ACB	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK. 2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan bulat. 2. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep operasi hitung pada bilangan ACB. 3. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep faktor, FPB dan KPK.
Pembelajaran 2. Bilangan Pecah atau Pecahan	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi pecahan, persen, perbandingan, skala. 2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait materi pecahan, persen, perbandingan, skala. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan pecahan. 2. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan pecahan 3. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan persen 4. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan perbandingan 5. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan skala.
Pembelajaran 3. Geometri	

KOMPETENSI GURU	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
<ol style="list-style-type: none"> Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi geometri. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah materi geometri serta kehidupan sehari-hari. 	<ol style="list-style-type: none"> Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan pada segitiga atau segiempat. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan segi banyak (poligon). Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Kekongruenan dan Kesebangunan. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan bangun ruang.
Pembelajaran 4. Pengukuran	
<ol style="list-style-type: none"> Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi pengukuran. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah materi pengukuran serta kehidupan sehari-hari. 	<ol style="list-style-type: none"> Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran panjang. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keliling bangun datar. Menyelesaikan masalah yang berkaitan luas bangun datar. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan volume bangun ruang. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan debit. Memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan jarak, waktu, dan kecepatan.
Pembelajaran 5. Statistika dan peluang	
<ol style="list-style-type: none"> Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi statistika (penyajian data, ukuran pemusatan data, ukuran penyebaran data, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang). 	<ol style="list-style-type: none"> Menganalisis data statistik secara deskriptif. Menganalisis penyajian data dalam bentuk tabel, diagram ataupun grafik. Menganalisis ukuran pemusatan (mean, median, dan modus) dari data statistik.

KOMPETENSI GURU	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait penyajian data, ukuran pemusatan, ukuran penyebaran, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang.	4. Menganalisis ukuran penyebaran (range, kuartil, simpangan baku dan variansi) dari data statistik. 5. Menganalisis nilai baku dari data statistik. 6. Memecahkan masalah sehari-hari berkaitan dengan teknik membilang, permutasi, kombinasi, dan peluang.
Pembelajaran 6. Kapita Selekta Matematika	
1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi logika, pola bilangan, persamaan linear, persamaan kuadrat dan grafik fungsi polinomial. 2. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika secara mendalam..	1. Menarik kesimpulan matematis dengan menggunakan penalaran logis. 2. Menentukan rumus dari suatu pola bilangan. 3. Menentukan rumus dari suatu deret bilangan. 4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan linear. 5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat. 6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi linear. 7. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi kuadrat. 8. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan trigonometri.

C. Ruang Lingkup

Materi pada modul ini untuk meningkatkan kemampuan Saudara sebagai Guru materi matematika yang digunakan dalam pembelajaran di SD. Berdasarkan tujuan tersebut, modul ini dikembangkan menjadi dua bagian. Bagian I Pendahuluan, berisi tentang Deskripsi Singkat Isi Modul, Peta Kompetensi, Dan

Ruang Lingkup. Bagian 2 terdiri dari enam kegiatan pembelajaran, yaitu sebagai berikut.

1. Kegiatan Belajar 1: Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat (ACB)
2. Kegiatan Belajar 2: Bilangan Pecah atau Pecahan
3. Kegiatan Belajar 3: Geometri
4. Kegiatan Belajar 4: Pengukuran
5. Kegiatan Belajar 5: Statistika dan Peluang
6. Kegiatan Belajar 6: Kapita Selekta Matematika

D. Petunjuk Belajar

Untuk membantu Anda dalam memahami modul ini alangkah lebih baik diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah dengan cermat uraian-uraian penting yang terdapat dalam modul ini sampai anda memahami secara tuntas tentang apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.
2. Temukanlah kata-kata kunci dari kegiatan belajar ini. Alangkah lebih baik apabila anda mencatat dan meringkas hal-hal penting tersebut.
3. Pahami modul ini melalui pemahaman dan pengalaman sendiri serta diskusikanlah dengan dengan rekan atau instruktur Anda.
4. Bacalah dan pelajarilah sumber-sumber lain yang relevan. Anda dapat menemukan bacaan dari berbagai sumber, termasuk dari internet.
5. Mantapkanlah pemahaman anda melalui pengerjaan forum diskusi dan tes formatif yang tersedia dalam modul ini dengan baik. Kemudian, nilai sendiri tingkat pencapaian anda dengan membandingkan jawaban yang telah anda buat dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat diakhir modul.
6. Diskusikanlah apa yang telah dipelajari, termasuk hal-hal yang dianggap masih sulit, dengan teman-teman sejawat Anda.

Pembelajaran 1. Bilangan Asli, cacah, dan Bulat (ACB)

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK.
2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait materi bilangan, bilangan bulat, FPB dan KPK..

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan bulat.
2. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep operasi hitung pada bilangan ACB.
3. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep faktor, FPB dan KPK.

C. Uraian Materi

Materi pada pembelajaran 1 terdiri dari materi, yaitu: bilangan, bilangan bulat dan operasi hitung pada bilangan bulat, serta FPB dan KPK.

1. Materi 1 Bilangan

Materi 1 bilangan membahas tentang konsep bilangan dan macam-macam bilangan,

a. Konsep Bilangan

Bilangan adalah suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*undefined term*). Bilangan merupakan suatu konsep yang abstrak, bukan simbol, bukan pula angka. Bilangan menyatakan suatu nilai yang bisa diartikan sebagai banyaknya atau urutan sesuatu atau bagian dari suatu keseluruhan. Bilangan merupakan konsep yang abstrak, bukan simbol, dan bukan angka. Tanda-tanda yang sering ditemukan bukan suatu bilangan tetapi merupakan lambang bilangan. Lambang bilangan memuat angka dengan nilai tempat tertentu.

b. Macam-Macam Bilangan

Macam-macam bilangan antara lain adalah sebagai berikut.

1) Bilangan kardinal

Bilangan kardinal menyatakan hasil membilang (berkaitan dengan pertanyaan berapa banyak). Bilangan kardinal juga digunakan untuk menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan. Contoh: ibu membeli 3 keranjang buah-buahan.

2) Bilangan ordinal

Bilangan ordinal menyatakan urutan dari suatu objek. Contoh: mobil yang ke-3 di halaman itu berwarna hitam.

3) Bilangan asli

Bilangan asli juga disebut dengan Natural Numbers. Himpunan bilangan asli = $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Bilangan asli dapat digolongkan menurut faktornya yaitu: bilangan genap, bilangan ganjil, dan bilangan prima.

4) Bilangan komposit

Bilangan komposit adalah bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor. Suatu bilangan bulat positif dinamakan bilangan komposit jika bilangan itu mempunyai pembagi lain kecuali bilangan itu sendiri dan 1. Himpunan bilangan komposit = $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$

5) Bilangan cacah

Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan.

Himpunan bilangan cacah = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

6) Bilangan sempurna

Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktornya (kecuali faktor yang sama dengan dirinya) sama dengan bilangan tersebut. Perhatikan contoh berikut:

- 6 merupakan bilangan sempurna, karena faktor dari 6 kecuali dirinya sendiri adalah 1, 2, dan 3. Jadi, $1 + 2 + 3 = 6$.
- 28 merupakan bilangan sempurna, karena faktor dari 28 kecuali dirinya sendiri adalah 1, 2, 4, 7, dan 14. Jadi, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

7) Bilangan bulat

Himpunan yang merupakan gabungan dari himpunan bilangan asli dengan lawannya dan juga bilangan nol disebut himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

8) Bilangan rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$ (setelah disederhanakan, a dan b tidak memiliki faktor sekutu kecuali 1).

9) Bilangan irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan-bilangan bulat a dan b , dengan $b \neq 0$. Bilangan irasional bukan merupakan bilangan bulat dan juga bukan merupakan bilangan pecahan. Jika bilangan irasional ditulis dalam bentuk desimal, bilangan itu tidak mempunyai pola yang teratur.

10) Bilangan real

Bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dengan bilangan irasional. Bilangan real dapat dinyatakan dengan lambang \mathbb{R} .

11) Bilangan kompleks

Himpunan bilangan kompleks dapat didefinisikan sebagai pasangan terurut (a, b) dengan $a, b \in \mathbb{R}$ atau $K = \{z | z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Bentuk umum bilangan kompleks adalah $a + bi$.

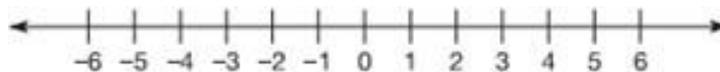
2. Materi 2 Bilangan Bulat dan Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Pada materi 2 ini membahas tentang: pengertian bilangan bulat, konsep nilai tempat dan contoh penerapannya pada pembelajaran, serta operasi hitung pada bilangan bulat.

a. Pengertian Bilangan Bulat

Pada bagian sebelumnya telah sedikit disinggung tentang definisi bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan asli, bilangan nol, dan lawan dari bilangan asli. Bilangan asli tersebut dapat disebut juga bilangan bulat positif. Lawan dari bilangan asli tersebut dapat disebut bilangan bulat negatif.

Himpunan bilangan bulat dapat dituliskan sebagai berikut: $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Jika digambarkan dalam garis bilangan, himpunan bilangan bulat adalah sebagai berikut:



Gambar 1 Garis bilangan himpunan bilangan bulat

Dari gambar 1, dalam garis bilangan tersebut terdiri dari:

- Himpunan bilangan bulat positif: $\{1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan Bilangan nol: $\{0\}$, dan
- Bilangan bulat negatif: $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

Setelah mengetahui tentang pengertian bilangan bulat, maka tahap selanjutnya adalah akan mempelajari bagaimana nilai tempat bilangan dan operasi hitung pada bilangan bulat, termasuk di dalamnya penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan bulat.

b. Konsep Nilai Tempat dan Contoh Penerapan Pada Pembelajaran

Nilai tempat merupakan nilai yang diberikan untuk sebuah angka berdasarkan letak angka tersebut. Bilangan 1.234, kita akan menentukan nilai tempat dari masing-masing angka tersebut. Kita tahu bahwa 1.234 dapat ditulis menjadi bentuk penjumlahan seperti berikut ini.

$$1.234 = 1.000 + 200 + 30 + 4 \quad \text{atau} \quad 1.234 = 1_{\text{ribuan}} + 2_{\text{ratusan}} + 3_{\text{puluhan}} + 4_{\text{satuan}}$$

Dari bentuk penjumlahan tersebut, maka angka 1 memiliki nilai tempat ribuan, angka 2 memiliki nilai tempat ratusan, angka 3 memiliki nilai tempat puluhan, dan angka 4 memiliki nilai tempat satuan. Contoh yang lain adalah kita akan menentukan nilai tempat dari 35.034. Apabila kita perhatikan pada bilangan tersebut terdapat 2 angka 3 yang tentunya memiliki nilai tempat yang berbeda. Seperti pada contoh sebelumnya, 35.034 juga dapat kita tulis menjadi bentuk penjumlahan seperti ini.

$$35.034 = 30.000 + 5.000 + 0 + 30 + 4,$$

Dari bentuk tersebut, maka angka 3 yang pertama memiliki nilai tempat puluhan ribu, 5 memiliki nilai tempat ribuan, 0 memiliki nilai tempat ratusan, 3 yang kedua memiliki nilai tempat puluhan dan 4 memiliki nilai tempat satuan. Berdasarkan kedua contoh tersebut, misalkan kita memiliki bilangan $abc.def$ maka untuk menentukan nilai tempat dari bilangan tersebut, dapat dirubah menjadi bentuk:

$$abc.def = 100.000a + 10.000b + 1000c + 100d + 10e + f,$$

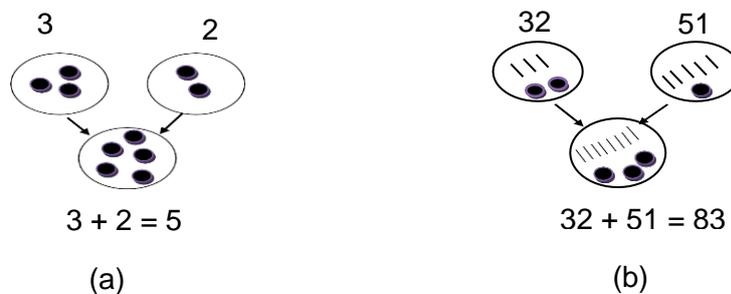
dengan kata lain nilai tempat a adalah ratus ribuan, nilai tempat b adalah puluh ribuan, nilai tempat c adalah ribuan, nilai tempat d adalah ratusan, nilai tempat e adalah puluhan dan nilai tempat f adalah satuan.

c. Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Operasi hitung pada bilangan bulat akan dijabarkan sebagai berikut.

1) Penjumlahan Bilangan Bulat

Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 2 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat

Pada gambar 2 (a) yang mengilustrasikan operasi penjumlahan $3 + 2$, berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa pada satu himpunan terdapat 3 anggota dan himpunan yang lain terdapat 2 anggota, sehingga gabungan dari dua himpunan tersebut adalah 5 anggota.

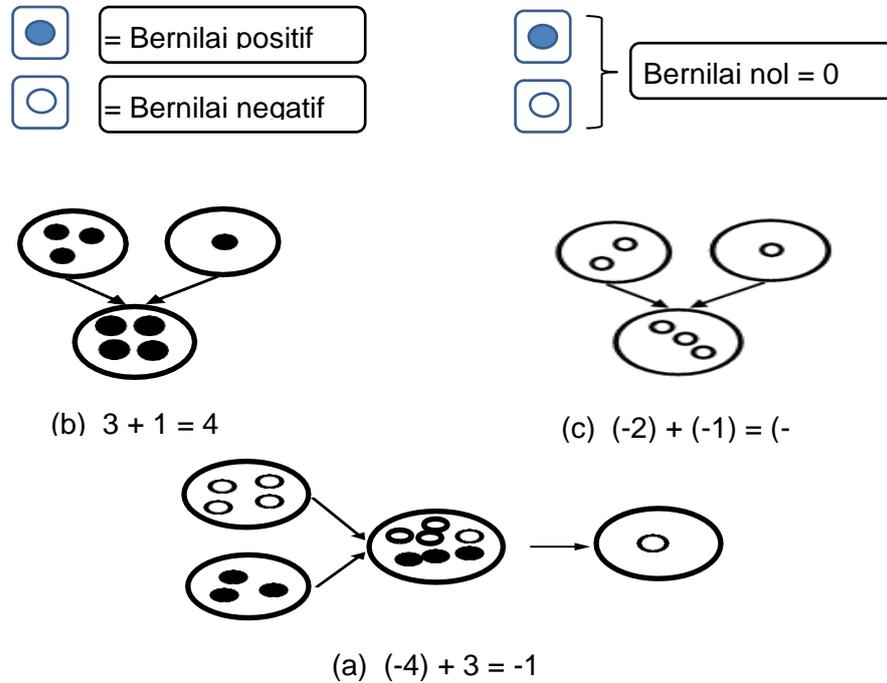
Pada Gambar 2 (b) mengilustrasikan $32 + 51$, dimana nilai tempat puluhan diwakili oleh stik dan nilai tempat satuan diwakili oleh koin hitam. Pada ilustrasi tersebut memperlihatkan bahwa untuk menjumlahkan, maka jumlahkanlah sesuai dengan nilai tempat yang sama, yaitu nilai tempat puluhan dengan puluhan ($30 + 50$) dan nilai tempat satuan dengan nilai tempat satuan ($2 + 1$), sehingga hasil akhirnya adalah 83.

Berdasarkan ilustrasi tersebut, jika a dan b adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan $a + b$. Gabungan dari himpunan a dan b diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari a dan b , dengan catatan kedua himpunan tidak memiliki persekutuan.

a) Media benda konkret

Perhatikan Gambar 3 yang mengilustrasikan penjumlahan bilangan bulat positif dengan positif, penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif, dan penjumlahan bilangan positif dengan bilangan bulat negatif dengan menggunakan media konkret. Media konkret yang digunakan adalah gambar koin berwarna hitam dan putih. Dari gambar 3 tersebut, dapat ditunjukkan atau digambarkan sebagai berikut.

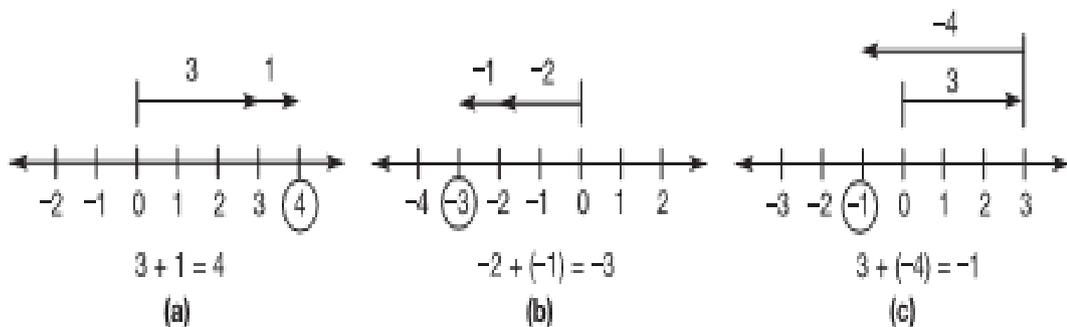
- (1) Gambar 3 (a) mengilustrasikan 3 koin hitam digabungkan dengan 1 koin hitam sehingga menjadi 4 koin hitam, atau $3 + 1 = 4$.
- (2) Gambar 3 (b) mengilustrasikan 2 koin putih akan digabungkan dengan 1 koin putih sehingga menjadi 3 koin merah, atau $(-2) + (-1) = (-3)$.
- (3) Gambar 3 (c) mengilustrasikan 4 koin putih digabungkan dengan 3 koin hitam (ketentuan menyebutkan bahwa pada saat koin berbeda warna digabungkan akan bernilai 0), sehingga hanya menyisakan 1 koin putih, atau $(-4) + 3 = -1$.



Gambar 3 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat Positif dengan Positif, Negatif dengan Negatif dan Positif dengan Negatif

(4) Garis bilangan

Pada penjumlahan bilangan bulat dapat diilustrasikan sebagai perpindahan sepanjang garis bilangan. Suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri. Operasi hitung penjumlahan diilustrasikan dengan langkah maju dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 4 Ilustrasi penjumlahan bilangan menggunakan garis bilangan

- (1) Gambar 4 (a) mengilustrasikan $3 + 1$, maka dari titik 0 akan bergerak ke arah kanan 3 langkah, kemudian bergerak maju tetap ke arah kanan 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik 4, atau $3 + 1 = 4$.
- (2) Gambar 4 (b) untuk mengilustrasikan $(-2) + (-1)$, dari titik 0 akan bergerak maju ke arah kiri 2 langkah, kemudian bergerak maju lagi (tetap ke arah kiri) 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik -3, atau $(-2) + (-1) = -3$.
- (3) Gambar 4 (c) untuk mengilustrasikan $3 + (-4)$, dari titik 0 bergerak maju ke arah kanan 3 langkah kemudian bergerak maju ke arah kiri (berbalik arah) sebanyak 4 langkah, sehingga akan berakhir di titik -1, atau $3 + (-4) = -1$.

Adapun, beberapa sifat penjumlahan bilangan bulat diantaranya:

(1) Sifat Tertutup

Jika a dan b anggota himpunan bilangan bulat, maka $a + b$ juga anggota himpunan bilangan bulat. Contoh: $2 + 3 = 5$, dimana 2,3, dan 4 adalah anggota bilangan bulat $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(2) Sifat Pertukaran (Komutatif)

Jika a dan b anggota bilangan bulat maka $a + b = b + a$. Contoh: $2 + 3 = 5$ dan $3 + 2 = 5$, jadi $2 + 3 = 3 + 2$

(3) Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Jika a , b dan c anggota bilangan bulat, maka: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Contoh: $2 + (3 + 4) = 9$ dan $(2 + 3) + 4 = 9$, jadi $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

(4) Memiliki unsur identitas

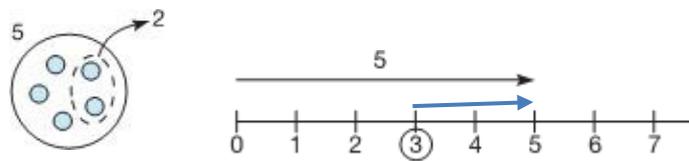
Ada bilangan 0 sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a$, untuk semua a anggota bilangan bulat. Contoh $2 + 0 = 2$ dan $0 + 2 = 2$, jadi $2 + 0 = 0 + 2$.

(5) Memiliki invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap bilangan bulat a , terdapat bilangan bulat $(-a)$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Contoh: $2 + (-2) = 0$ dan $(-2) + 2 = 0$, jadi $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$.

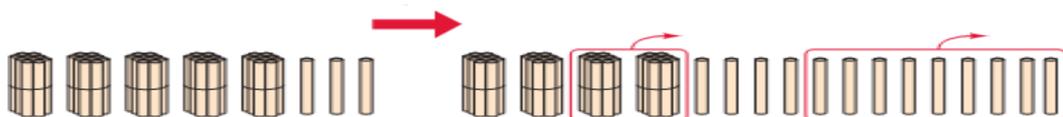
2) Pengurangan Bilangan Bulat

Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau $(a - b = c)$ operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$. Untuk menjelaskan operasi hitung pengurangan, perhatikan ilustrasi Gambar 1.8 berikut ini.



Gambar 5 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat positif

Gambar 5, mengilustrasikan $5 - 2 = 3$. Dengan menggunakan garis bilangan (perlu diperhatikan aturan yang telah disepakati pada operasi hitung penjumlahan) berlaku, suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri, dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Untuk mengilustrasikan $5 - 2$, dari titik 0, bergerak maju sebanyak 5 langkah ke titik 5, kemudian mundur 2 langkah, sehingga berakhir di titik 3, atau $5 - 2 = 3$. Untuk operasi hitung pengurangan melibatkan nilai tempat puluhan, perhatikan ilustrasi gambar berikut ini:

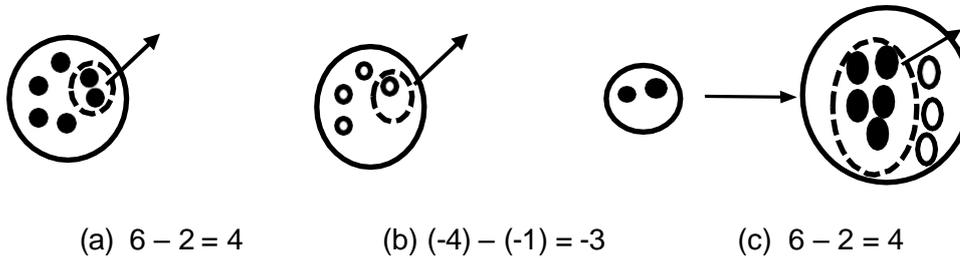


Gambar 6 Ilustrasi pengurangan bilangan melibatkan nilai tempat

Gambar 6 di atas mengilustrasikan pengurangan $53 - 29$. Satu ikat lidi melambangkan nilai tempat puluhan, dan satu lidi melambangkan nilai tempat satuan. Untuk mengilustrasikan $53 - 29$, maka terdapat 5 ikat lidi puluhan dan 3 lidi satuan, dari kumpulan lidi tersebut akan diminta 2 ikat lidi puluhan dan 9 lidi satuan. Untuk memudahkan, 1 ikat lidi satuan akan dipecah menjadi 10 lidi satuan, sehingga menjadi 4 ikat lidi puluhan dan 13 lidi satuan. Setelah diminta maka akan tersisa 2 ikat lidi puluhan dan 4 lidi satuan atau $53 - 29 = 24$.

Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif diilustrasikan

pada gambar 8 berikut ini.



Gambar 7 Ilustrasi pengurangan bilangan bulat

Pada Gambar 7 di atas, bilangan bulat positif diwakilkan oleh koin berwarna hitam, dan bilangan negatif diwakilkan oleh koin berwarna putih. Gambar 7 (a) mengilustrasikan terdapat 6 koin hitam kemudian akan diambil 2 koin hitam, sehingga sisanya adalah 4 koin hitam, atau $6 - 2 = 4$. Gambar 7 (b) mengilustrasikan terdapat 4 koin putih kemudian akan diambil 1 koin putih, sehingga sisanya adalah 3 koin putih, atau $(-4) - (-1) = (-3)$. Gambar 7 (c) mengilustrasikan terdapat 2 koin hitam, tetapi akan diambil 5 koin hitam. Karena koin hitam tidak mencukupi maka akan disediakan lagi 3 koin hitam, dan agar bernilai netral maka juga disediakan 3 koin putih, sehingga sisa koinnya adalah 3 koin merah, atau $2 - 5 = -3$.

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa: **$a - b = a + (-b)$ dan $a - (-b) = a + b$.** Jadi, pada operasi hitung pengurangan berlaku definisi, misalkan a dan b bilangan bulat, maka $a - b$ adalah sebuah bilangan bulat c yang bersifat $b + c = a$. Dapat disimpulkan bahwa **$a - b = c$ jika dan hanya jika $a = b + c$. Jika a dan b bilangan bulat, maka $a - b = a + (-b)$.**

Jika pada operasi hitung penjumlahan berlaku sifat komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas dan memiliki unsur invers, menurut Anda apakah pada operasi hitung pengurangan memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

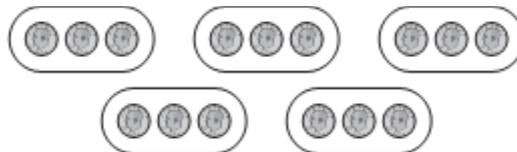
Sebagai ilustrasi pada sifat komutatif atau sifat pertukaran, jika pada operasi hitung pengurangan pada bilangan bulat berlaku sifat tersebut, maka haruslah berlaku $a - b = b - a$. Dengan menggunakan contoh penyangkalan $5 - 3 = 2$, dan $3 - 5 = -2$, hal tersebut menunjukkan bahwa **pada operasi pengurangan tidak berlaku sifat komutatif.**

Untuk sifat yang lain silahkan dianalisis apakah berlaku atau tidak.

3) Perkalian Bilangan Bulat

Pada hakikatnya perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang. Salah satu kasus sederhana yaitu, terdapat lima buah keranjang, dimana setiap keranjang terdapat 3 butir telur. Berapa banyak telur seluruhnya?

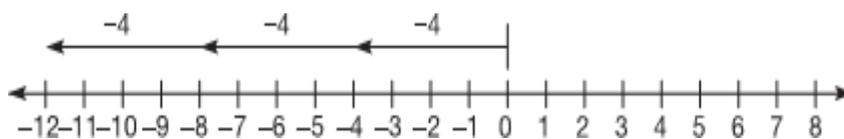
Permasalahan tersebut dapat diilustrasikan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 8 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan himpunan
Berdasarkan gambar 8 di atas, jumlah seluruh telur adalah $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, atau terdapat 5 kelompok dengan anggota masing-masing 3 dilambangkan dengan $5 \times 3 = 15$. Secara sederhana, dapat juga diilustrasikan pada garis bilangan seperti berikut ini.



Gambar 9 Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan garis bilangan
Gambar 9 di atas, menggambarkan $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ atau $5 \times 3 = 15$. Berikutnya, perhatikan ilustrasi garis bilangan berikut ini.



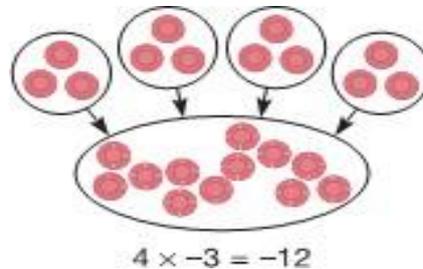
Gambar 10 Ilustrasi Perkalian Bilangan Bulat Negatif Menggunakan Garis Bilangan

Garis bilangan pada gambar 10 tersebut menyatakan:

$$(-4) + (-4) + (-4) = 3 \times (-4) = -12.$$

Contoh yang lain adalah menggunakan koin muatan, dimana koin berwarna merah memiliki nilai negatif. Pada setiap kelompok terdapat 3 koin merah (3 koin bernilai negatif), dan terdapat 4 kelompok.

Secara matematis ditulis $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 4 \times (-3) = -12$.



Gambar 11 Ilustrasi perkalian bilangan bulat negatif menggunakan himpunan

Beberapa contoh sebelumnya adalah perkalian dua bilangan bulat positif dan perkalian bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bagaimana untuk perkalian bilangan bulat negatif dan bilangan bulat negatif?

Perhatikan pola perkalian bilangan berikut ini.

$$\begin{array}{rcl}
 (-3) \times 3 & = & -9 \\
 (-3) \times 2 & = & -6 \\
 (-3) \times 1 & = & -3 \\
 (-3) \times 0 & = & 0 \\
 (-3) \times (-1) & = & ? \\
 (-3) \times (-2) & = & ? \\
 (-3) \times (-3) & = & ?
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} +3 \\ +3 \\ +3 \\ +3 \\ +3 \\ +3 \\ +3 \end{array}$$

Jika diperhatikan pola tersebut (pada bagian hasil) semakin bertambah 3, sehingga $(-3) \times (-1) = 3$, $(-3) \times (-2) = 6$, $(-3) \times (-3) = 9$.

Coba Anda buat contoh lain dengan bilangan yang berbeda! Simpulan apa yang Anda dapatkan? Dari beberapa contoh tersebut dan contoh lain yang Anda buat, diperoleh sebuah aturan sebagai berikut.

- (1) $-a \times b = -(a \times b)$ atau $(-) \times (+) = (-)$, bilangan negatif \times bilangan positif hasilnya bilangan negatif.
- (2) $a \times -b = -(a \times b)$ atau $(+) \times (-) = (-)$, bilangan positif \times bilangan negatif hasilnya bilangan negatif.
- (3) $a \times b = (a \times b)$ atau $(+) \times (+) = (+)$, bilangan positif \times bilangan positif hasilnya bilangan positif.
- (4) $-a \times -b = (a \times b)$ atau $(-) \times (-) = (+)$, bilangan negatif \times bilangan negatif hasilnya bilangan positif.

Adapun beberapa sifat perkalian bilangan bulat adalah sebagai berikut:

a) Sifat Tertutup

Jika a dan b anggota himpunan bilangan bulat, maka $a \times b$ juga anggota himpunan bilangan bulat. Bentuk umum $a \times b$ dapat dinyatakan dengan ab .

b) Sifat Komutatif

Jika a dan b anggota bilangan bulat maka $ab = ba$

c) Sifat Asosiatif

Jika a , b dan c anggota bilangan bulat, maka $(ab) \times c = a \times (bc)$

d) Sifat Distributif

Jika a , b , c anggota himpunan bilangan bulat, maka $a(b+c) = ab+ac$

e) Memiliki Unsur Identitas

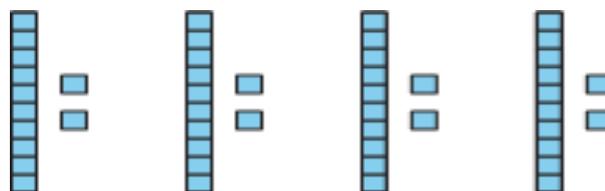
Ada bilangan 1 sedemikian sehingga $a \times 1 = 1 \times a$ untuk semua a anggota bilangan bulat.

4) Pembagian Bilangan Bulat

Pada hakikatnya operasi hitung pembagian pada dua buah bilangan bulat positif adalah pengurangan yang berulang sampai nol. Definisi ini hanya berlaku saat bilangan yang dibagi habis dibagi oleh bilangan pembagi. Perhatikan contoh kasus berikut ini.

Berapakah $48 : 4$?

Perhatikan ilustrasi penyelesaian berikut ini:



Gambar 12 Ilustrasi pembagian $48 : 4$

Gambar 12 tersebut mengilustrasikan 48 memiliki nilai tempat puluhan 4 dan nilai satuan 8. Karena akan dibagi pada 4 kelompok, maka setiap kelompok memiliki 1 puluhan, dan 2 satuan, atau dengan kata lain $48 : 4 = 12$.

Definisi:

Untuk setiap a dan b anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

Jika pada operasi hitung perkalian berlaku sifat komutatif, asosiatif, distributif, dan memiliki unsur identitas, menurut Anda apakah pada operasi hitung pembagian memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

3. Materi 3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Sebelum dibahas tentang FPB dan KPK terlebih dahulu akan dibahas tentang bilangan prima, faktor prima, dan faktorisasi prima.

a Bilangan prima, Fartor Prima, dan Faktorisasi Prima

Pada bagian ini akan dibahas tentang bilangan prima, fartor prima, dan faktorisasi prima dan contoh-contohnya.

1) Bilangan Prima

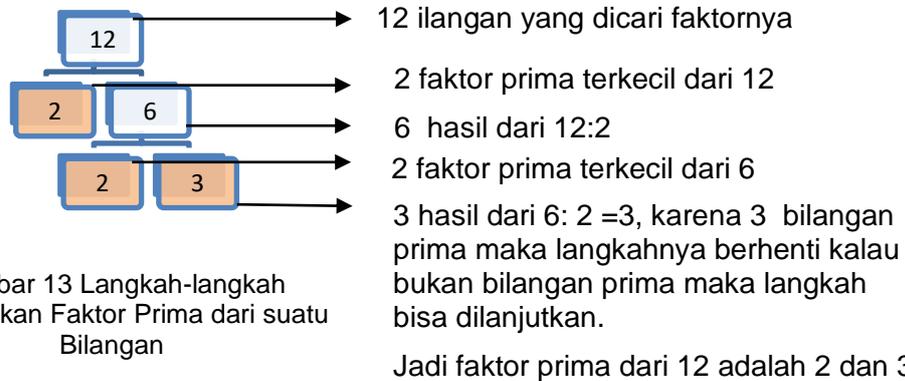
Bilangan prima adalah bilangan asli lebih dari 1 yang hanya atau tepat memiliki 2 faktor yaitu bilangan itu sendiri dan 1. Contoh: banyak bilangan prima yang kurang dari 100 yang disusun berurutan mulai dari bilangan yang terkecil adalah: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97. Ada 25 bilangan prima yang kurang dari 100.

2) Faktor prima

Faktor prima suatu bilangan adalah faktor-faktor dari bilangan tersebut yang merupakan bilangan prima, Sebagai contoh, faktor dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Dari faktor-foktor tersebut yang merupakan bilangan prima adalah 2 dan 3. Dengan demikian Faktor prima dari 12 adalah 2 dan 3.

Bagai mana cara menentukan faktor prima suatu bilangan? Untuk menentukan faktor prima atau faktorisasi prima suatu bilangan dapat menggunakan “pohon

faktor". Contoh langkah-langkah menentukan faktor prima dari 12 seperti tersebut di atas, dapat dilakukan dengan membuat pohon faktor seperti berikut ini.



3) Faktorisasi Prima

Faktorisasi Prima adalah menguraikan bilangan menjadi perkalian faktor-faktor primanya. Faktor prima dari bilangan 12 adalah 2 dan 3. Dengan demikian bilangan 12 dapat diuraikan menjadi perkalian dari faktor-faktor primanya yaitu $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$. Untuk menentukan faktorisasi prima dari suatu bilangan dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan pohon faktor seperti uraian sebelumnya.

Contoh menentukan faktor prima dari 18 dan 20 dengan pohon faktor adalah sebagai berikut.



Faktorisasi prima dari 18 adalah:
 $2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

Faktorisasi prima dari 20 adalah:
 $2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

Gambar 14 Langkah-langkah Menentukan Faktorisasi Prima dari suatu Bilangan

b. Faktor Persekutuan Terbesar

Bilangan bulat a ($a \neq 0$) merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$. Bilangan bulat positif a merupakan pembagi bilangan bulat positif b dan c , maka a disebut pembagi persekutuan b dan c .

Definisi:

Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b , FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi: $d \mid a$ dan $d \mid b$.

FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan $a = \text{FPB}(a, b)$.

Untuk menentukan FPB (a, b) dapat melalui metode irisan himpunan, metode faktorisasi prima, dan metode algoritma pembagian.

1) Metode Irisan Himpunan

Metode irisan himpunan dapat dilakukan dengan mendaftar semua bilangan dari himpunan faktor (pembagi positif) dari dua bilangan, kemudian tentukan himpunan sekutunya.

Contoh: tentukan FPB dari 16 dan 24

Faktor 16 = {1, 2, 4, 8, 16}.

Faktor 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

Faktor dari 16 dan 24 adalah {1, 2, 4, 8}.

FPB dari 16 dan 24 adalah 8

2) Metode Faktorisasi Prima

Untuk beberapa kasus, metode irisan himpunan memiliki kekurangan dari segi waktu. Metode tersebut akan memerlukan waktu yang lama jika bilangan-bilangannya memiliki banyak faktor. Metode faktorisasi prima dapat dilakukan dengan cara menentukan faktorisasi prima dari dua atau lebih bilangan, lalu tentukan faktor sekutu prima, **FPB dari dua bilangan atau lebih adalah hasil kali faktor-faktor sekutu, dimana yang dipilih adalah bilangan dengan pangkat terendah antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.**

Contoh 1:

Tentukan FPB dari 300 dan 378

$$\left. \begin{array}{l} 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ 378 = 2 \times 3^2 \times 7 \end{array} \right\} \text{ Diambil faktor yang sama dengan pangkat terendah}$$

Faktor sekutu prima dari faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3. FPB dari 300 dan 378 adalah $2 \times 3 = 6$

Contoh 2

Tini berencana menghias pigura produksi miliknya dengan manik- manik. Setelah dikumpulkan ternyata Tini memiliki 96 manik-manik kuning, 120 manik-manik merah, 108 manik-manik ungu, dan 72 manik-manik biru. Berapakah pigura yang dapat diproduksi oleh Tini dengan banyak manik-manik dan warna yang sama?

Solusi dari pernyataan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari 96, 120, 108, 72 atau FPB (96, 120, 108, 72) mengapa FPB? Karena Tini akan membagi manik-maniknya untuk setiap pigura.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Faktorisasi prima dari } 96 = 2^5 \times 3 \\ \text{Faktorisasi prima dari } 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \\ \text{Faktorisasi prima dari } 108 = 2^2 \times 3^3 \\ \text{Faktorisasi prima dari } 72 = 2^3 \times 3^2 \end{array} \right\} \text{ Diambil faktor yang sama dengan pangkat terendah}$$

Karena FPB (96, 120, 108, 72) adalah: $2^2 \times 3 = 12$, maka pigura yang dapat diproduksi oleh Tini ada 12 dengan setiap pigura akan dihias oleh 8 manik-manik kuning, 10 manik-manik merah, 9 manik-manik ungu dan 6 manik-manik biru.

3) Metode Algoritma Pembagian

Menurut algoritma pembagian, bilangan positif a dan b , $a \geq b$, dapat ditulis dengan $a = bq + r$, dimana q bilangan bulat positif dan r bilangan cacah.

Contoh: Tentukan FPB dari 378 dan 300 Menurut algoritma pembagian:

$$378 = 1 \times 300 + 78, \text{ dan } 0 \leq 78 \leq 300$$

Hal ini berarti pembagi 378 dan 300 juga membagi 78. Jadi, FPB (378, 300) = FPB (300, 78)

Gunakan algoritma pembagian lagi:

$$300 = 3 \times 78 + 66, 0 \leq 66 \leq 78, \text{ FPB } \{300, 78\} = \text{FPB } \{78, 66\}$$

$$78 = 1 \times 66 + 12, 0 \leq 12 \leq 66, \text{ FPB } \{78, 66\} = \text{FPB } \{66, 12\}$$

$$66 = 5 \times 12 + 6, 0 \leq 6 \leq 12, \text{FPB } \{66, 12\} = \text{FPB } \{12, 6\}$$

$$12 = 2 \times 6 + 0. \text{FPB } \{12, 6\} = 6$$

$$\text{Jadi FPB } \{378 \text{ dan } 300\} = 6$$

Contoh:

Bu guru memiliki 105 buah pisang, 75 buah kelengkeng, dan 30 buah jeruk. Buah-buahan tersebut akan dibagikan secara merata untuk murid-muridnya.

Berapakah jumlah masing-masing buah yang diterima oleh setiap murid?

Solusi dari pertanyaan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari bilangan-bilangan tersebut.

FPB dari 105, 75, dan 30 adalah 15 (Mengapa?)

Maka banyak murid yang mendapatkan buah-buahan tersebut ada 15 orang.

Jadi, setiap anak akan mendapatkan 7 buah pisang, 5 buah kelengkeng, dan 2 buah jeruk.

c Kelipatan Persekutuan Terkecil

Suatu bilangan bulat c disebut kelipatan persekutuan dari bilangan bulat tak nol a dan b jika $a|c$ dan $b|c$. Himpunan kelipatan persekutuan dari a dan b merupakan sebuah bilangan bulat terkecil, yang ditulis KPK (a, b) .

Definisi:

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan tidak nol a dan b , KPK (a, b) adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi $a|m$ dan $b|m$.

$$\text{KPK } (a, b) = \frac{axb}{\text{FPB}\{a,b\}}$$

Seperti halnya FPB, untuk menentukan KPK juga dapat dilakukan dengan metode irisan himpunan dan metode faktorisasi prima.

1) Metode Irisan Himpunan

Untuk menentukan KPK melalui metode irisan himpunan, sebelumnya dapat ditentukan terlebih dahulu kelipatan-kelipatan positif dari bilangan-bilangan, kemudian tentukan himpunan persekutuan dari kelipatan bilangan-bilangan itu, dan tentukan yang terkecil.

Contoh:

Tentukan KPK dari 12, 15, dan 20

Kelipatan 12 = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...}

Kelipatan 15 = {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, ...}

Kelipatan 20 = {20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...}

Kelipatan persekutuan dari 12, 15, 20 = {60, 120, ...}

KPK dari 12,15,20 = 60

2) Metode Faktorisasi Prima

Seperti halnya FPB, metode faktorisasi prima juga dapat digunakan untuk menentukan KPK. Perbedaannya adalah saat **menentukan KPK pilih bilangan dengan pangkat tertinggi antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.**

Contoh 1:

Tentukan KPK dari 12, 15, dan 20

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ 15 = 3 \times 5 \\ 20 = 2^2 \times 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Diambil faktor yang sama dengan pangkat tertinggi} \\ \text{dan faktor yang tidak sama ikut dikalikan} \end{array}$$

Faktor sekutu prima dari faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3. KPK dari 12, 15, dan 20 adalah $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Contoh 2

Rosi mengikuti les Matematika setiap 3 hari sekali Arsyah mengikuti les matematika setiap 4 hari sekali, dan Pinka setiap 6 hari. Mereka bertiga berlatih bersama yang kedua tanggal 5 Februari 2021. Kapan mereka bertiga berlatih bersama pada tanggal untuk pertama kalinya?

Dalam menyelesaikan permasalahan di atas dapat menggunakan konsep KPK, yaitu dengan menentukan KPK bilangan 3,4, dan 5.

Kelipatan 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

Kelipatan 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

Kelipatan 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

Kelipatan dari 3, 4, dan 6 yang terkecil adalah 24

Menghitung mundur 24 hari sebelum tanggal 5 Februari 2021.

Dari tanggal 5 Februari 2021 sampai akhir bulan Januari 2021 = 5 hari, di bulan Januari $24 - 5 = 19$ hari sebelum tanggal 31 Januari atau menghitung mundur dari akhir bulan Januari, yaitu $31 - 19 = 12$ hari. Dari ketiga jadwal les matematika di atas, terlihat bahwa mereka berlatih bersama untuk pertama kalinya pada tanggal 12 Januari 2021.

D. Rangkuman

1. Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat

- a. Bilangan adalah suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*undefined term*).
- b. Lambang bilangan adalah simbol atau lambang yang digunakan dalam mewakili suatu bilangan.
- c. Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan.
- d. Bilangan kardinal menyatakan hasil membilang (berkaitan dengan pertanyaan berapa banyak dan menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan).
- e. Bilangan ordinal menyatakan urutan atau posisi suatu objek.
- f. Bilangan komposit adalah bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor.
- g. Bilangan asli dapat digolongkan menurut faktornya yaitu: bilangan genap, bilangan ganjil, dan bilangan prima.
- h. Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan.
- i. Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktornya (kecuali faktor yang sama dengan dirinya) sama dengan bilangan tersebut.
- j. Bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan bulat positif (bilangan asli), bilangan nol, dan bilangan bulat negatif (lawan dari bilangan asli).

- k. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$.
- l. Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan-bilangan bulat a dan b , dengan $b \neq 0$.
- m. Bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dengan bilangan irasional.
- n. Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $z = a + bi$, dengan $a, b \in R$, dan i : imajiner (bilangan khayal).

2. Bilangan Bulat dan Operasi Hitung Pada Bilangan Bulat

- a. Jika a dan b adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan $a + b$, yang diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari a dan b .
- b. Operasi hitung penjumlahan bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan memiliki invers terhadap penjumlahan.
- c. Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau ($a - b = c$), maka operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$, dengan syarat $a > b$.
- d. Perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang.
- e. Operasi hitung perkalian antara lain bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, distributif dan memiliki unsur identitas.
- f. Untuk setiap a dan b anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

3. FPB dan KPK

- a. Bilangan bulat a ($a \neq 0$) merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$.
- b. Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b , FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi: $d \mid a$ dan $d \mid b$.
- c. FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan $a = \text{FPB}(a, b)$
- d. Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bukan nol a dan b , $\text{KPK}\{a, b\}$ adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi $a \mid m$ dan $b \mid m$.
 $\text{KPK}\{a, b\} = axb$

Pembelajaran 2. Bilangan Pecah (Pecahan)

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi pecahan, persen, perbandingan, skala.
2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait materi pecahan, persen, perbandingan, skala.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan pecahan.
2. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan pecahan
3. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan persen
4. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan perbandingan
5. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan skala.

C. Uraian Materi

Pada pembelajaran 2 ini, akan dibahas tentang bilangan pecahan, operasi hitung pada bilangan pecahan, pecahan desimal dan persen serta perbandingan dan skala

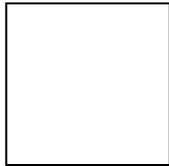
1. Materi 1 Bilangan Pecahan

Materi 1 bilangan pecahan ini akan dibahas tentang pengertian bilangan, pecahan senilai, murni, senama, dan campuran.

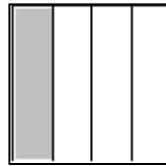
a. Pengertian Bilangan Pecahan

Konsep bilangan pecahan dapat dihubungkan dengan konsep besar (luas), panjang, maupun himpunan. Perhatikan ilustrasi berikut.

Gambar yang mewakili bilangan 1 dan gambar yang mewakili bilangan $\frac{1}{4}$ sebagai berikut.



Luas daerah keseluruhan mewakili bilangan 1



Luas daerah yang diarsir mewakili bilangan $\frac{1}{4}$

Gambar 15 ilustrasi bilangan 1 dan $\frac{1}{4}$

Guru dapat memperlihatkan luas daerah yang mewakili bilangan 1 dan luas daerah yang mewakili bilangan $\frac{1}{4}$



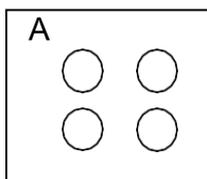
1

Satu satuan panjang yang mewakili bilangan 1

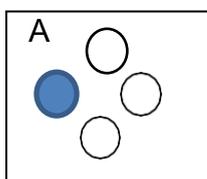


Lambang untuk panjang bagian yang diarsir adalah $\frac{1}{4}$

Bilangan pecahan dapat diilustrasikan sebagai perbandingan himpunan bagian yang sama dari suatu himpunan terhadap keseluruhan himpunan semula. Guru memperlihatkan gambar himpunan sebagai berikut.



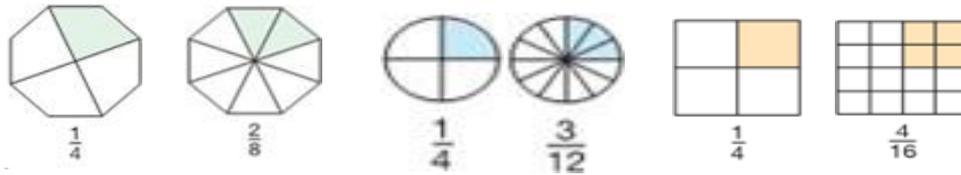
Banyak anggota himpunan A adalah 4



Jika himpunan A dibagi menjadi himpunan-himpunan bagian yang sama, maka setiap himpunan bagian mempunyai satu anggota dan dibandingkan dengan himpunan A adalah $\frac{1}{4}$.

b. Bilangan Pecahan Senilai

Perhatikan ilustrasi berikut ini!



Gambar 16 Ilustrasi Pecahan Bernilai $\frac{1}{4}$

Gambar 14 tersebut menggambarkan bagian yang sama dari bagian yang diarsir tetapi dengan pembagi yang berbeda. Berdasarkan Gambar 15, maka $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ atau $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$ Bilangan-bilangan pecahan senilai adalah bilangan-bilangan pecahan yang cara penulisannya berbeda tetapi mempunyai hasil bagi yang sama, atau bilangan-bilangan itu mewakili daerah yang sama, atau mewakili bagian yang sama.

c. Bilangan Pecahan Murni, Senama, dan Campuran

Berikut akan diuraikan tentang bilangan pecahan murni, senama, dan campuran.

1) Bilangan Pecahan Murni

Bilangan pecahan murni disebut juga bilangan pecahan sejati adalah bilangan pecahan yang paling sederhana (tidak dapat disederhanakan lagi). Contoh bilangan murni antara lain $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, dan $\frac{5}{7}$.

2) Bilangan Pecahan Senama

Bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut sama dinamakan bilangan-bilangan pecahan senama. Contoh bilangan pecahan senama antara lain: $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, dan $\frac{4}{6}$.

3) Bilangan Pecahan Campuran.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 17 Pecahan Campuran-1

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah $\frac{3}{2}$ bagian.



Gambar 18 Pecahan Campuran-2

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah 1 bagian ditambah $\frac{1}{2}$ bagian atau $1\frac{1}{2}$. Gambar 15 dan gambar 16 adalah dua gambar yang sama. Bagian yang diarsir pada gambar 15 dan bagian yang diarsir pada gambar 16 menunjukkan luas daerah yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

2. Materi 2 Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan

Pada materi 2 ini akan dibahas tentang penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan pecahan.

a. Penjumlahan Bilangan Pecahan

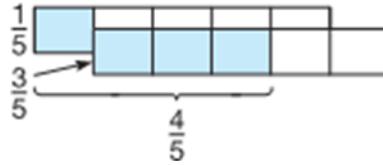
Pada penjumlahan pecahan dibahas tentang penjumlahan pecahan berpenyebut sama dan penjumlahan pecahan berpenyebut berbeda.

1) Penjumlahan Pecahan Berpenyebut Sama

Perhatikan soal berikut:

Hasil penjumlahan $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \dots$

Untuk mencari hasil penjumlahan itu, kita dapat menggunakan bangun datar yang tampak seperti gambar berikut.



Gambar 19 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Pecahan Berpenyebut Sama

Pada Gambar 17 tersebut nampak jelas luas bagian yang diarsir sama. Karena luas bagiannya telah sama, maka kita dapat menggabungkan bagian- bagian yang diarsir, sehingga dari gambar di atas, tampak bahwa $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

Penyelesaian dengan algoritma, masalah di atas dapat diselesaikan sebagai berikut: $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{(1+3)}{5} = \frac{4}{5}$.

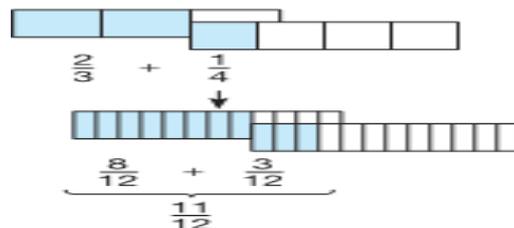
Atau dengan kata lain: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

2) Penjumlahan Bilangan Pecahan Berpenyebut Berbeda

Perhatikan soal berikut ini!

Hasil penjumlahan $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \dots$

Untuk mencari hasil penjumlahan itu, perhatikan ilustrasi seperti gambar berikut.



Gambar 20 Ilustrasi Penjumlahan Pecahan Berpenyebut Berbeda

Berdasarkan gambar 18 tersebut, kita tidak dapat langsung menjumlahkan kedua bilangan pecahan dikarenakan “luas daerah yang terarsir berbeda”, sehingga yang dapat kita lakukan adalah menyamakan luas daerahnya. Langkah yang dapat dilakukan adalah **mencari pecahan senilai** dari $\frac{2}{3}$ dan $\frac{1}{4}$ pecahan senilai yang dipilih adalah yang memiliki penyebut yang sama. Mengapa demikian? Agar luas daerah yang diarsir untuk kedua pecahan tersebut sama. Selanjutnya pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{3}{12}$ (dapatkan kita memilih pecahan yang lain?). Dapat disimpulkan bahwa **agar penyebutnya sama, maka dicari KPK dari kedua**

atau lebih penyebut tersebut. Setelah memiliki penyebut yang sama, maka peserta didik akan mengingat lagi prosedur untuk penjumlahan berpenyebut sama

b. Pengurangan Bilangan Pecahan

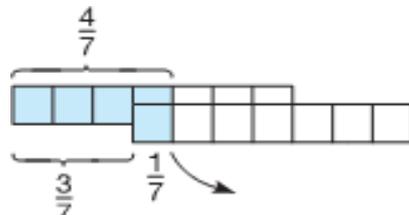
Pada pengurangan pecahan akan dibahas tentang pengurangan pecahan berpenyebut sama dan berpenyebut berbeda.

1) Pengurangan Pecahan Berpenyebut Sama.

Perhatikan soal berikut!

$$\text{Hasil pengurangan } \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \dots$$

Untuk mencari hasil pengurangan itu, kita dapat menggunakan bantuan bangun datar yang tampak seperti berikut.



Gambar 21 Ilustrasi Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Sama

Seperti halnya pada konsep penjumlahan, pada pengurangan bilangan pecahan berpenyebut sama, besar arsirannya sama, sehingga kita dapat mengambil $\frac{3}{7}$ dari $\frac{4}{7}$ bagian yang tersedia, sehingga berdasarkan gambar 2.6 di atas, tampak

bahwa $\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$. Penyelesaian dengan algoritma, masalah di atas dapat

$$\text{diselesaikan sebagai berikut: } \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{(4-3)}{7} = \frac{1}{7}$$

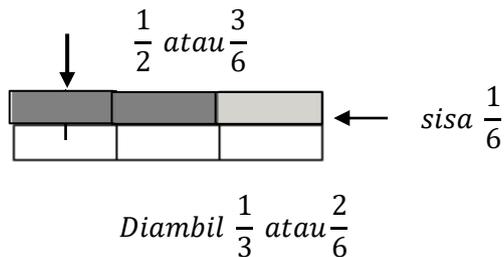
Atau dengan kata lain: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

2) Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Berbeda

Perhatikan soal berikut ini!

Hasil pengurangan $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \dots$

Untuk mencari hasil pengurangan itu, kita dapat menggunakan bantuan bangun datar yang tampak seperti beriku.



Gambar 22 Ilustrasi Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Berbeda

Melalui penggunaan konsep yang sama seperti penjumlahan bilangan pecahan berpenyebut berbeda, dari gambar di atas, tampak bahwa:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Penyelesaian tersebut jika kita terapkan dalam pembelajaran, maka langkah yang dapat kita lakukan adalah:

- Memengingat kembali konsep pengurangan.
- Konsep pecahan senilai adalah konsep awal atau prasyarat untuk pengurangan bilangan pecahan berpenyebut beda.
- Apabila penyebut kedua atau lebih pecahan belum sama, maka samakan penyebutnya bisa dengan menentukan KPK penyebutnya.
- Aturan untuk pengurangan bilangan pecahan berpenyebut berbeda, yaitu jika penyebutnya belum sama maka langkah awal yang dilakukan adalah dapat mencari pecahan senilai dari masing-masing pecahan sampai penyebutnya sama, atau dapat mencari KPK dari penyebutnya.

c. Perkalian Bilangan Pecahan

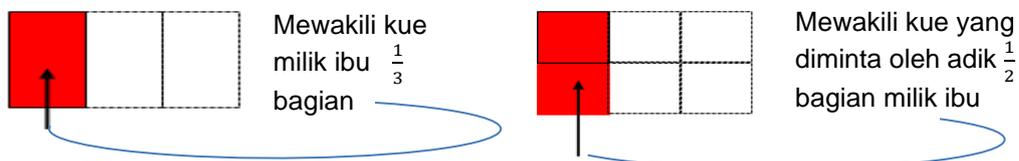
Seperti pada perkalian bilangan asli, perkalian bilangan asli dengan bilangan pecahan dapat dijabarkan seperti contoh berikut.

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$6 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Pada contoh perkalian bilangan asli dengan bilangan pecahan maka kita dapat merubahnya menjadi penjumlahan berulang seperti pada perkalian bilangan asli. Nah, bagaimana dengan perkalian dua bilangan pecahan?

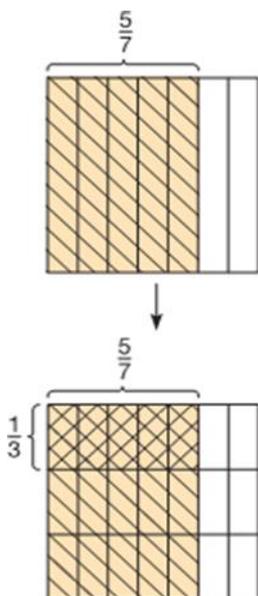
Perhatikan contoh kasus berikut ini: "Ibu memiliki $\frac{1}{3}$ bagian kue, kemudian adik meminta $\frac{1}{2}$ bagian kue yang dimiliki ibu, berapa bagian kue yang diminta adik?" Ilustrasi cerita tersebut ditunjukkan seperti gambar berikut ini.



Gambar 23 Ilustrasi Gambaran dari Soal Cerita

Dari gambar tersebut terlihat bahwa adik sekarang memiliki $\frac{1}{2}$ bagian dari $\frac{1}{3}$ bagian kue atau senilai dengan $\frac{1}{6}$ bagian kue. Secara matematis hal tersebut menggambarkan $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Perhatikan contoh selanjutnya!



Gambar di samping mengilustrasikan $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$.

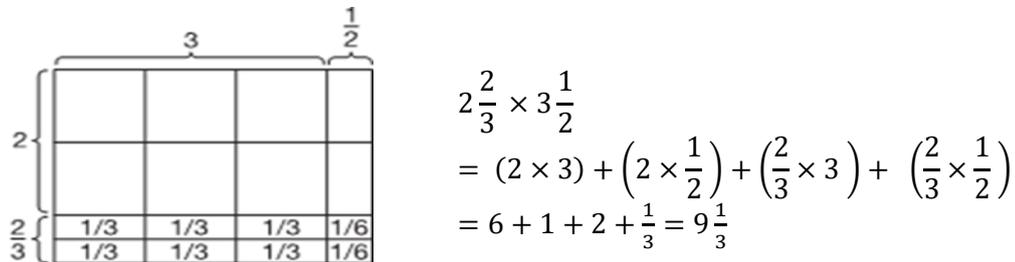
Ilustrasi gambar tersebut adalah sebagai berikut:

Misalkan Ani memiliki kertas yang diarsir $\frac{5}{7}$ bagian dan $\frac{1}{3}$ bagian dari kertas milik Ani diminta oleh Dini, berapa bagian kertas yang diminta Dini?

Besar bagian yang diminta adalah $\frac{1}{3}$ bagian dari $\frac{5}{7}$ bagian atau $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$

Gambar 24 Ilustrasi Perkalian Bilangan Pecahan Biasa

Bahasan selanjutnya adalah perkalian pecahan yang melibatkan pecahan campuran, perhatikanlah gambar berikut ini!



Gambar 25 Ilustrasi Perkalian Bilangan Pecahan Campuran

Dari beberapa kasus yang telah disajikan maka dapat didefinisikan: Jika a, b, c, d adalah anggota himpunan bilangan bulat, maka $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

d. Pembagian Bilangan Pecahan

Terdapat contoh kasus, yaitu $\frac{1}{3} : 2 = \dots$

Permasalahan tersebut tidak dapat diselesaikan seperti pada pembagian bilangan asli. Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini.



Gambar 26 Ilustrasi Pembagian Bilangan Pecahan dengan Bulat

Dengan demikian $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

Contoh kasus yang lain yaitu hasil pembagian $1 : \frac{1}{3} = \dots$

Untuk menyelesaikan permasalahan itu dapat digunakan definisi sebagai berikut:

$$a : b = n \text{ jika dan hanya jika } n \times b = a$$

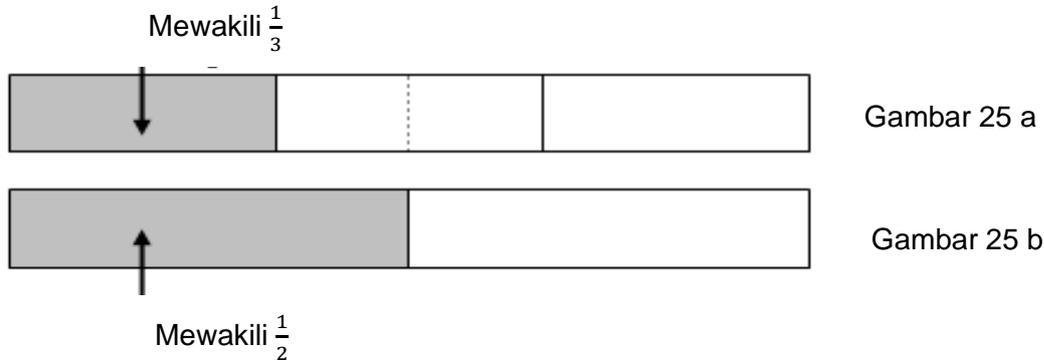
Melalui definisi tersebut, akan kita coba menyelesaikan masalah berikut ini.

$1 : \frac{1}{3} = \dots$ artinya $\dots \times \frac{1}{3} = 1$ atau sama dengan berapa kali $\frac{1}{3}$ agar sama dengan

1. Akhirnya, kita dapat menemukan bahwa: $1 : \frac{1}{3} = 3$ karena $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Tingkatan kasus yang lain adalah $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

Perhatikan ilustrasi gambar berikut!



Gambar 27 Ilustrasi Pembagian Bilangan Pecahan dengan Pecahan

Dari gambar 25 a dan gambar 25 b di atas tampak bahwa kita memerlukan $1\frac{1}{2}$ kali bidang yang diarsir pada gambar 25 a agar dapat tepat menutup bidang yang diarsir pada gambar 25 b.

Jadi dapat disimpulkan $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$

Berdasarkan algoritma, masalah pembagian di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

- 1) $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
- 2) $1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$
- 3) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Dari beberapa contoh tersebut, secara algoritma untuk menyelesaikan operasi hitung pembagian bilangan pecahan adalah sebagai berikut.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

3. Materi 3 Desimal dan Persen

Pada materi 3 ini, akan dibahas tentang pengertian bilangan desimal, mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk biasa ke desimal dan sebaliknya, operasi pada bilangan desimal, dan persen.

a. Pengertian Bilangan Pecahan Desimal

Sebelum mempelajari bilangan desimal, perlu dipahami tentang nilai tempat dan arti dari penulisan bilangan pecahan desimal. Perhatikan penulisan berikut ini.

$$\frac{1}{10} \text{ ditulis } 0,1$$

$$\frac{1}{100} \text{ ditulis } 0,01$$

$$\frac{1}{1000} \text{ ditulis } 0,001$$

$$\frac{1}{10000} \text{ ditulis } 0,0001$$

Jadi, dengan memperhatikan sistem nilai tempat, kita dapat menyatakan bentuk panjang dari bilangan pecahan desimal seperti 25,615, yaitu:

$$25,615 = (2 \times 10) + (5 \times 1) + \left(6 \times \frac{1}{10}\right) + \left(1 \times \frac{1}{100}\right) + \left(5 \times \frac{1}{1000}\right)$$

b. Mengubah Penulisan Bilangan Pecahan dari Bentuk Biasa ke Desimal dan Sebaliknya

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: (1) menggunakan bilangan pecahan senama dengan penyebut kelipatan 10, dan (2) menggunakan cara pembagian panjang. Untuk mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal menggunakan cara (1), perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1

Tuliskan bilangan $\frac{7}{8}$ kedalam bentuk desimal!

Jawab:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times \frac{125}{125}$$

$$= \frac{875}{1000}$$

$$= 0,875$$

Contoh 2

Tuliskan bilangan $4\frac{3}{4}$ kedalam bentuk desimal!

Jawab:

$$\begin{aligned}4\frac{3}{4} &= 4 + \frac{3}{4} \\ &= 4 + \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} \\ &= 4 + \frac{75}{100} \\ &= 4 + 0,75 \\ &= 4,75\end{aligned}$$

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan memperhatikan bilangannya. Jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang berhingga, maka kita dapat memanfaatkan sistem nilai tempat; sedangkan jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang tidak berhingga tetapi berulang, maka kita harus memanipulasi bilangan itu sehingga bentuk pecahan desimalnya diperoleh.

Contoh 3

$$\begin{aligned}9,078 &= 9 + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} \\ &= \frac{9000}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{8}{1000} \\ &= \frac{9078}{1000}\end{aligned}$$

Contoh 4

$$5,3939393 = \dots$$

Misal, $n = 5,3939393\dots$

$$100n = 539,39393\dots$$

$$\begin{array}{r}n = 5,3939393\dots \\ \hline\end{array}$$

$$99n = 534$$

$$n = \frac{534}{99}$$

c. Operasi Pada Bilangan Pecahan Desimal

Perhatikan contoh di bawah ini!

Contoh 5

$$0,652 = 0 + 0,6 + 0,05 + 0,002$$

$$\begin{aligned} 0,343 &= 0 + 0,3 + 0,04 + 0,003 \\ \hline &+ \\ &= 0 + 0,9 + 0,09 + 0,005 \\ &= 0 + 0,900 + 0,09 + 0,005 \\ &= 0,995 \end{aligned}$$

Jadi, $0,652 + 0,343 = 0,995$

Contoh 6

$$0,379 = 0 + 0,3 + 0,07 + 0,009$$

$$\begin{aligned} \hline &+ \\ 0,257 &= 0 + 0,2 + 0,05 + 0,007 \\ &= 0 + 0,5 + 0,12 + 0,016 \\ &= 0 + 0,500 + 0,120 + 0,016 \\ &= 0,636 \end{aligned}$$

Jadi, $0,379 + 0,257 = 0,636$.

Contoh 7

$$0,875 = 0 + 0,8 + 0,07 + 0,005$$

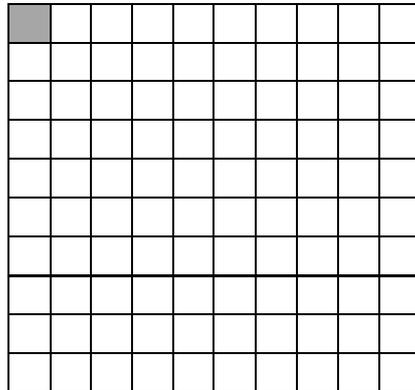
$$0,324 = 0 + 0,3 + 0,02 + 0,004$$

$$\begin{aligned} \hline &- \\ &= 0 + 0,5 + 0,05 + 0,001 \\ &= 0,551 \end{aligned}$$

Jadi, $0,875 - 0,324 = 0,551$.

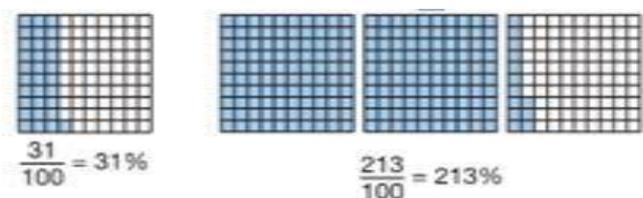
d. Persen

Untuk menjelaskan konsep persen, dapat dibantu dengan gambar persegi-persegi satuan berikut ini.



Gambar 28 Ilustrasi Penjelasan Konsep Persen

Terdapat 100 persegi satuan yang menyatakan perseratus atau dilambangkan dengan (%). Jika terdapat satu persegi satuan yang diarsir, maka melambangkan 1 perseratus atau 1%. Jika terdapat 5 persegi satuan yang diarsir, maka akan melambangkan 5 perseratus atau 5%. Jika terdapat 31 persegi satuan yang diarsir, maka akan melambangkan 31%. Jika terdapat 3 persegi satuan besar, dengan jumlah 213 persegi satuan kecil yang diarsir maka akan melambangkan 213 perseratus atau 213%. Berikut ini ilustrasinya!



Gambar 29 Ilustrasi 31 % dan 213 %.

Masalah-masalah dalam kehidupan nyata yang berkaitan dengan persen biasanya mempunyai bentuk-bentuk sebagai berikut:

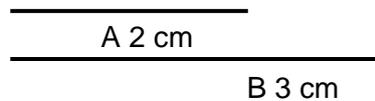
- 1) menentukan persen dari suatu bilangan,
- 2) menentukan persen suatu bilangan dibanding suatu bilangan lain, dan
- 3) menentukan suatu bilangan jika persen dari suatu bilangan diketahui.

4. Materi 4 Perbandingan, dan Skala

Pada materi 4 ini akan dibahas tentang: perbandingan, perbandingan senilai, perbandingan berbalik nilai, dan skala.

a. Perbandingan

Perbandingan sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, Raka adalah salah satu siswa yang paling tinggi di kelasnya. Artinya, Raka adalah siswa yang paling tinggi dibandingkan dengan teman-temannya di kelas. Untuk menjelaskan perbandingan kepada siswa SD, kita dapat menggunakan media pembelajaran atau alat peraga seperti benang atau manik-manik. Sebagai ilustrasi, perhatikan dua buah gambar benang berikut ini.



Gambar 30 Ilustrasi Perbandingan Panjang Benang

Panjang kedua benang pada gambar di atas dapat dinyatakan dalam perbandingan sebagai berikut.

- 1) Benang B adalah 1 cm lebih panjang dari benang A.
- 2) Benang A adalah 1 cm lebih pendek dari benang B
- 3) Panjang benang B berbanding panjang benang A adalah 3 berbanding 2.
- 4) Panjang benang A berbanding panjang benang B adalah 2 berbanding 3.

Selanjutnya, perhatikan gambar 29 berikut ini!



Gambar 31 Ilustrasi Perbandingan Menggunakan Manik-Manik

Manik-manik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan sebagai berikut.

- 1) Perbandingan banyak manik-manik ungu dengan putih adalah 3 berbanding 2.
- 2) Perbandingan banyaknya manik-manik putih dengan ungu adalah 2 berbanding 3.
- 3) Perbandingan banyaknya manik-manik ungu dengan semua manik-manik adalah 3 berbanding 5.
- 4) Perbandingan banyaknya manik-manik putih dengan semua manik-manik adalah 2 berbanding 5.

Selain persoalan di atas, contoh permasalahan pada konsep perbandingan lainnya adalah sebagai berikut.

Pada suatu kelas, banyak peserta didik laki-laki adalah 25, dan banyak peserta didik perempuan adalah 20. Perbandingan banyak peserta didik laki laki dan perempuan adalah $25 : 20 = 5 : 4$. Perbandingan banyak peserta didik laki-laki dan peserta didik keseluruhan adalah $25 : 45 = 5 : 9$. Perbandingan banyak peserta didik perempuan dan peserta didik keseluruhan adalah $20 : 45 = 4 : 9$.

Dua buah perbandingan yang ekuivalen dapat membentuk sebuah proporsi.

b. Perbandingan Senilai

Perhatikan beberapa contoh kasus berikut ini: Misalkan harga 1 kg mangga adalah Rp12.500,00. Maka harga 2 kg mangga adalah Rp25.000,00. Supaya Anda lebih memahami materi ini, perhatikan contoh berikut!

Jika harga 5 kg rambutan adalah Rp75.000,00, berapakah harga 7 kg rambutan? Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah mencari harga 1 kg rambutan, yaitu $\text{Rp}75.000 / 5 = \text{Rp}15.000$.

Jadi harga 7 kg rambutan adalah $\text{Rp}15.000,00 \times 7 = \text{Rp}105.000,00$. Jika dihubungkan dengan proporsi maka:

$$\begin{aligned}\frac{75000}{5} &= \frac{m}{7} \\ 5m &= 75000 \times 7 \\ m &= \frac{75000 \times 7}{5} \\ m &= 105.000\end{aligned}$$

Jadi, harga 7 kg rambutan adalah Rp105.000,00.

Contoh yang lain adalah: Pada sebuah peternakan terdapat 40 ayam. Untuk 40 ayam tersebut disediakan sebuah karung makanan ayam yang akan habis dalam waktu 5 hari. Karena adanya wabah virus, ayam yang tersisa hanya 25 ayam. Cukup untuk berapa harikah satu karung pakan ayam?

$\frac{40}{25} = \frac{m}{5}$ (semakin sedikit ayam, waktu untuk menghabiskan makanan ayam semakin lama).

$$25m = 40 \times 5$$

$$25m = 200$$

$$m = 8 \text{ hari}$$

Jadi satu karung pakan ayam cukup untuk 8 hari.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut apabila diperhatikan, apabila nilai salah satu aspek bertambah, maka nilai aspek yang lain juga akan bertambah. Kondisi seperti ini yang dinamakan perbandingan senilai. **Perbandingan senilai adalah suatu perbandingan yang apabila suatu nilai ditambah maka jumlah pembandingnya juga bertambah.**

c. Perbandingan Berbalik Nilai

Perhatikan beberapa contoh berikut ini. Misal, untuk merenovasi sebuah rumah, diperlukan 12 orang pekerja dalam waktu 3 hari. Berapa lamakah rumah tersebut dapat selesai direnovasi jika pekerja ada 36 orang?

Untuk menjawab soal tersebut maka kita harus menuliskan terlebih dahulu hal-hal yang diketahui dalam soal sebagai berikut:

$$12 \text{ orang} = 3 \text{ hari.}$$

$$36 \text{ orang} = \dots \text{ hari}$$

Waktu yang dibutuhkan untuk merenovasi rumah jika pekerjanya ada 36 orang kita misalkan dengan n .

Maka:

$$36 \text{ orang} \times n = 12 \text{ orang} \times 3 \text{ hari}$$

$$36 \times n = 36$$

$$n = 36 : 36$$

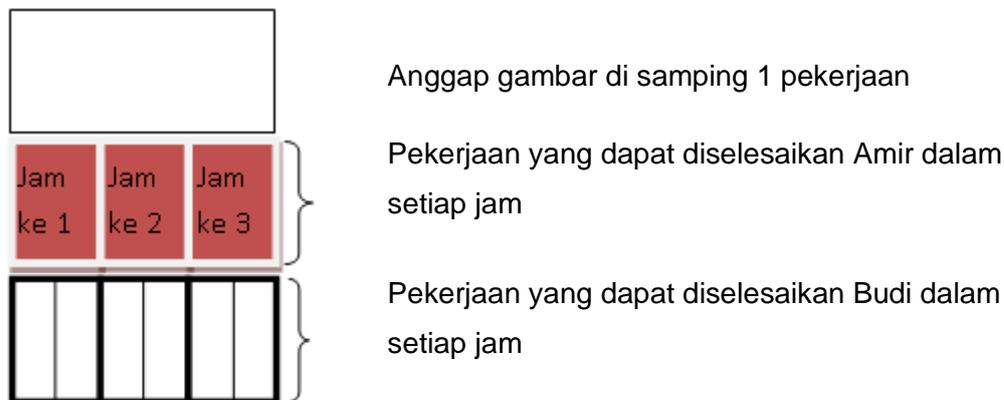
$$n = 1$$

Jadi waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah adalah 1 hari. Artinya, semakin banyak pekerja maka semakin sedikit waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah.

Sekarang perhatikan contoh permasalahan berikut ini!

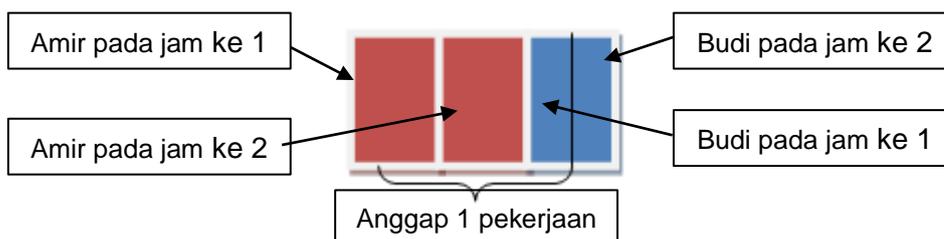
Amir dapat menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 3 jam, sedangkan Budi dapat menyelesaikan dalam waktu 6 jam. Jika mereka bekerja bersama- sama, berapa waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut?

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka Amir dapat menyelesaikan $\frac{1}{3}$ bagian pekerjaan dalam 1 jam, dan Budi dapat menyelesaikan $\frac{1}{6}$ bagian pekerjaan dalam waktu 1 jam. Permasalahan tersebut dapat diilustrasikan pada gambar berikut ini.



Gambar 32 Ilustrasi Pekerjaan yang Diselesaikan Masing-masing Orang

Jika mereka bekerja bersama-sama maka:



Gambar 33 Ilustrasi Pekerjaan yang Diselesaikan Secara Bersama-sama

Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa:

Pada jam pertama Amir dan Budi secara bersama-sama menyelesaikan $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ bagian pekerjaan (setiap jam mereka dapat menyelesaikan $\frac{3}{6}$ bagian pekerjaan).

Jadi sisa pekerjaannya adalah: $1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

Karena sisa pekerjaan mereka adalah $\frac{3}{6}$ bagian, maka pekerjaan akan selesai dalam waktu 2 jam.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya, setiap jam mereka dapat menyelesaikan $\frac{3}{6}$ bagian pekerjaan, maka untuk menyelesaikan semua pekerjaan mereka membutuhkan waktu $\frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{3} = 2$ jam.

Secara matematis dapat ditulis:

$$\frac{1}{t_T} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B}$$

$$\frac{1}{t_T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{t_T} = \frac{3}{6}$$

$$t_T = 2 \text{ jam}$$

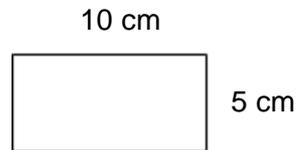
Jadi, pekerjaan tersebut akan selesai dalam waktu 2 jam.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, apabila nilai dari suatu aspek bertambah, maka nilai dari aspek yang lain akan berkurang. Kondisi seperti ini yang dinamakan dengan perbandingan berbalik nilai. **Perbandingan berbalik nilai adalah perbandingan yang apabila nilainya ditambah maka nilai pembandingnya berkurang.**

d. Skala

Untuk mengilustrasikan konsep skala, dapat dimulai dengan cerita tentang denah sebuah tanah. Sebidang tanah berbentuk persegi dengan panjang 100 m dan lebar 50 m. Jika 1 cm pada gambar denah menunjukkan 1.000 cm pada bidang tanah sebenarnya, gambarkan denah bidang tanah itu!

Karena $100 \text{ m} = 10.000 \text{ cm}$ dan $50 \text{ m} = 5.000 \text{ cm}$, panjang dan lebar denah itu berturut-turut adalah $10.000/1.000 = 10 \text{ cm}$ dan $5.000/1.000 = 5 \text{ cm}$. Akhirnya dengan mudah mereka dapat menggambar denah itu, yaitu:



Kalimat yang menyatakan, "1 cm pada gambar denah menunjukkan 1.000 cm pada bidang tanah sebenarnya" disebut dengan denah itu mempunyai "skala 1 : 1.000".

$$\text{skala} = \frac{\text{Jarak pada Peta}}{\text{Jarak yang sebenarnya}}$$

$$\text{Jarak sebenarnya} = \frac{\text{Jarak pada Peta}}{\text{Skala}}$$

$$\text{Jarak pada peta} = \text{Skala} \times \text{Jarak sebenarnya}$$

D. Rangkuman

1. Bilangan Pecahan dan Operasi Hitung Pada Bilangan Pecahan

- a. Bilangan pecahan dilambangkan dengan $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ dengan catatan a dan b anggota bilangan bulat.
- b. Menjelaskan konsep bilangan pecahan dapat diilustrasikan dengan konsep panjang, luas, ataupun himpunan.
- c. Bilangan-bilangan pecahan senilai adalah bilangan-bilangan pecahan yang cara penulisannya berbeda tetapi mempunyai hasil bagi yang sama, atau bilangan-bilangan itu mewakili daerah yang sama, atau mewakili bagian yang sama.
- d. Bilangan pecahan murni disebut juga bilangan pecahan sejati adalah
- e. bilangan pecahan yang paling sederhana (tidak dapat disederhanakan lagi).
- f. Bilangan pecahan senama adalah bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut sama.

2. Desimal dan Persen

- a. Sistem nilai tempat dapat dinyatakan bentuk panjang dari bilangan pecahan desimal
- b. Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: (1) menggunakan bilangan pecahan senama dengan penyebut kelipatan 10, dan (2) menggunakan cara pembagian panjang
- c. Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan memperhatikan bilangannya.
- d. Persen atau perseratus dilambangkan dengan %

3. Perbandingan dan Skala

- a. Perbandingan a dengan b dapat kita lambangkan dengan $a : b$.
- b. Dua buah perbandingan yang ekuivalen dapat membentuk sebuah proporsi.

Pembelajaran 3. Geometri

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi geometri.
2. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah materi geometri serta kehidupan sehari-hari.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan pada segitiga atau segiempat.
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan segi banyak (poligon).
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan Kekongruenan dan Kesebangunan.
4. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan bangun ruang.

C. Uraian Materi

Pada uraian materi akan dibahas tentang: dasar-dasar geometri, segi banyak (Poligon), kekongruenan dan kesebangunan serta bangun ruang.

1. Materi 1 Dasar-dasar Geometri

Struktur geometri modern menyepakati istilah dalam geometri, yaitu: (1) unsur yang tidak didefinisikan, (2) unsur yang didefinisikan, (3) aksioma/postulat, dan (4) teorema/dalil/rumus. Unsur tidak didefinisikan merupakan konsep mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, contoh titik, garis dan bidang. Unsur yang didefinisikan merupakan konsep pengembangan dari unsur tidak

didefinisikan dan merupakan konsep memiliki batasan, contoh sinar garis, ruas garis, segitiga. Aksioma/postulat merupakan konsep yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan kebenarannya, contoh postulat garis sejajar. Teorema/dalil/rumus adalah konsep yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif, contoh Teorema Pythagoras.

a. Titik

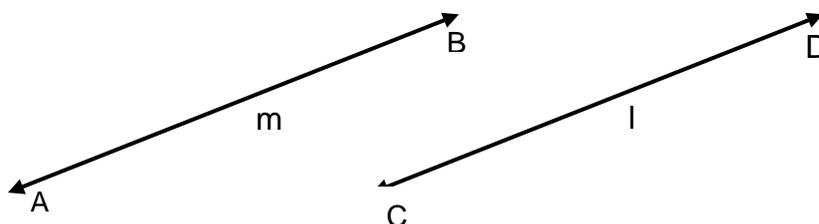
Titik merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Titik merupakan konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran dan berat. Titik disimbolkan dengan noktah. Penamaan titik menggunakan huruf kapital, contoh titik A, titik P, dan sebagainya.



Gambar 34 Titik

b. Garis

Garis juga merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Garis merupakan gagasan abstrak yang lurus, memanjang kedua arah, tidak terbatas. Ada 2 cara melakukan penamaan untuk garis, yaitu: (1) garis yang dinyatakan dengan satu huruf kecil, contoh garis m, garis l, dan sebagainya; (2) garis yang dinyatakan dengan perwakilan dua buah titik ditulis dengan huruf kapital, misal garis AB, garis CD, dan sebagainya.



Gambar 35 Garis

Garis juga sering disebut sebagai unsur geometri satu dimensi. Hal tersebut dikarenakan garis merupakan sebuah konsep yang hanya memiliki unsur panjang saja.

Sinar garis merupakan bagian dari garis yang memanjang ke satu arah dengan panjang tidak terhingga.



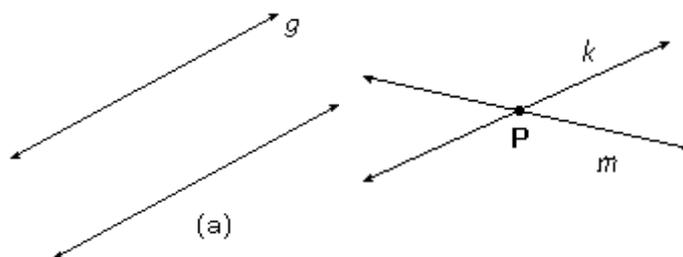
Gambar 36 Sinar Garis

Ruas garis merupakan bagian dari garis yang dibatasi oleh dua buah titik pada ujung dan pangkalnya. Ruas garis dapat diukur panjangnya.



Gambar 37 Ruas Garis

Dua garis g dan h dikatakan sejajar ($g \parallel h$) jika kedua garis tersebut tidak mempunyai titik sekutu (titik potong).

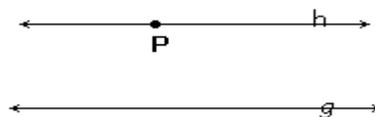


Gambar 38 Garis Sejajar dan Berpotongan

Dua garis m dan k dikatakan berpotongan jika kedua garis tersebut memiliki satu titik potong.

Berikut merupakan salah satu contoh aksioma pada garis. Aksioma yang akan dicontohkan adalah aksioma tentang garis sejajar atau sering disebut aksioma kesejajaran.

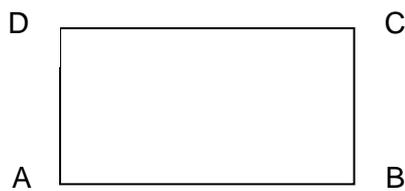
Melalui sebuah titik P di luar sebuah garis g , ada tepat satu garis h yang sejajar dengan g .



Gambar 39 Garis Sejajar atau Aksioma Kesejajaran

c. Bidang

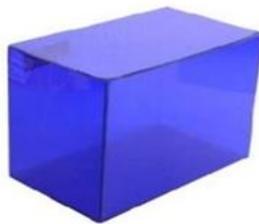
Bidang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga bidang termasuk unsur yang tidak didefinisikan. Bidang dapat diartikan sebagai permukaan yang rata, meluas ke segala arah dengan tidak terbatas, serta tidak memiliki ketebalan. Bidang termasuk ke dalam kategori bangun dua dimensi, karena memiliki panjang dan lebar atau alas dan tinggi.



Gambar 40 Bidang

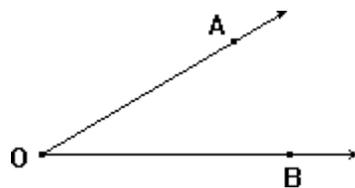
d. Ruang

Ruang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga ruang termasuk unsur yang tidak didefinisikan. Ruang diartikan sebagai unsur geometri dalam konteks tiga dimensi, karena memiliki unsur panjang, lebar dan tinggi. Salah satu bentuk model dari ruang adalah model bangun ruang.



Gambar 41 Ruang

e. Sudut



Gambar 42 Daerah Sudut

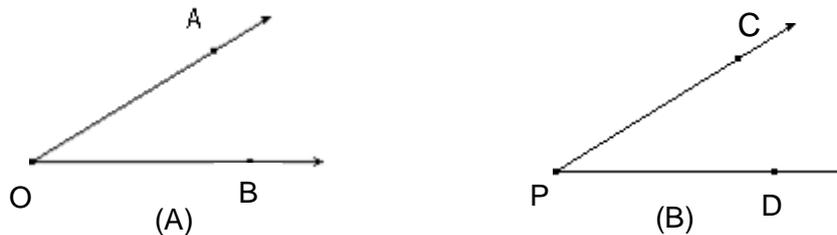
Sudut merupakan daerah yang dibentuk oleh dua sinar garis yang tidak kolinear (tidak terletak pada satu garis lurus) dan konkuren (garis yang bertemu pada satu titik potong) yang berhimpit di titik pangkalnya. Gambar di atas menggambarkan

besar sudut AOB, atau $\angle AOB$. Berdasarkan gambar tersebut maka terdapat titik sudut AOB atau dapat disingkat titik sudut O. Untuk mengukur besar sudut umumnya menggunakan satuan baku yaitu derajat atau radian. Satuan baku untuk mengukur besar sudut pada siswa Sekolah Dasar adalah satuan baku derajat, yang dapat diukur dengan menggunakan bantuan busur derajat.

Pada pembelajaran di Sekolah Dasar, untuk memudahkan atau membantu siswa memahami apa itu sudut, kita dapat mengaitkannya dengan jam. Siswa diminta untuk mengamati daerah yang dibentuk misalnya oleh jarum menit dan jarum jam, besar daerah itulah yang dimaksud dengan besar sudut. Berikut beberapa contoh jenis sudut.

1) Dua Sudut Kongruen

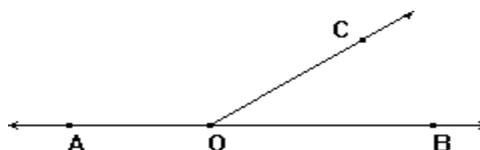
$\angle AOB$ kongruen dengan $\angle CPD$ (biasanya ditulis sebagai: $\angle AOB \cong \angle CPD$). Dua buah sudut dikatakan kongruen jika besar ukuran dua sudut sama.



Gambar 43 Dua Sudut Kongruen

2) Sudut Suplemen (Berpelurus)

$\angle AOC$ suplemen $\angle COB$, atau $\angle COB$ suplemen $\angle AOC$. Jumlah besar sudut berpelurus adalah 180° .

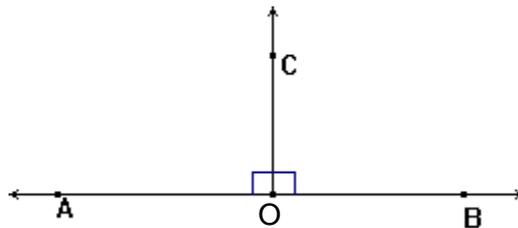


Gambar 44 Sudut Suplemen (Berpelurus)

3) Sudut Siku-siku

Sudut siku-siku adalah sudut yang kongruen dengan suplemennya dan mempunyai besar sudut 90^0 .

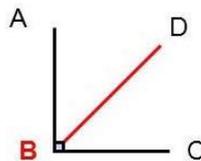
$\angle AOC \cong \angle COB$ dan $\angle AOC$ suplemen $\angle COB$, maka $\angle AOC$ dan $\angle COB$ sudut siku-siku.



Gambar 45 Sudut Siku-Siku

4) Sudut Komplemen

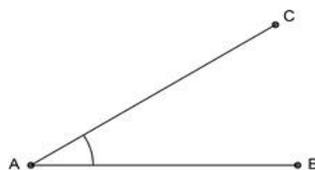
Sudut komplemen adalah sudut yang besarnya 90^0 atau disebut juga dengan sudut berpenyiku.



Gambar 46 Sudut Komplemen

5) Sudut Lancip

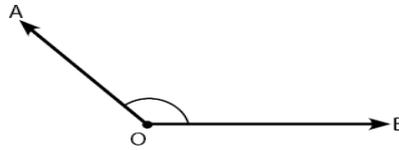
Sudut lancip adalah sudut yang ukurannya kurang dari 90^0 .



Gambar 47 Sudut Lancip

6) Sudut Tumpul

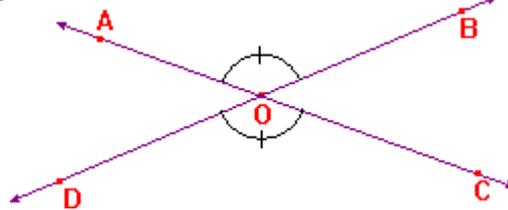
Sudut tumpul adalah sudut yang ukurannya antara 90° sampai 180° .



Gambar 48 Sudut Tumpul

7) Sudut Bertolak Belakang

Andaikan terdapat dua buah garis yang saling berpotongan

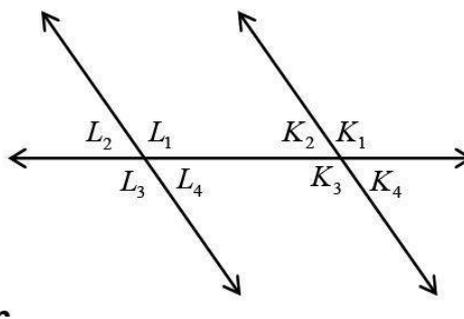


Gambar 49 Sudut Bertolak Belakang

Maka $\angle AOB = \angle COD$ dan $\angle AOD = \angle BOC$

$\angle AOB$ dan $\angle COD$ disebut sudut yang saling bertolak belakang atau sudut bertolak belakang, begitu pula dengan sudut bertolak belakang.

Perhatikan gambar 48 berikut ini.



Gambar 50 Sudut-Sudut yang Dibentuk oleh Garis yang Memotong Dua Garis Sejajar

Pada gambar tersebut, dua buah garis sejajar dipotong oleh sebuah garis, sehingga akan terbentuk 8 daerah sudut, atau beberapa pasangan-pasangan sudut.

Berikut adalah sudut-sudut yang berkaitan dengan gambar di atas.

8) Sudut Sehadap

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L1$ dan $\angle K1$ disebut sudut sehadap. Besar sudut sehadap adalah sama atau $\angle L1 = \angle K1$. Dapatkah Anda menemukan pasangan sudut sehadap yang lain?

9) Sudut Dalam Berseberangan

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L1$ dan $\angle K3$ disebut sudut dalam berseberangan. Besar sudut dalam berseberangan adalah sama atau $\angle L1 = \angle K3$. Berikut adalah cara untuk menunjukkan besar sudut dalam berseberangan adalah sama:

$\angle L1 = \angle L3$ karena sudut bertolak belakang

$\angle L3 = \angle K3$ karena sudut sehadap, maka:

$\angle L1 = \angle K3$.

Coba Anda temukan pasangan sudut dalam berseberangan yang lain!

10) Sudut Luar Berseberangan

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L2$ dan $\angle K4$ disebut sudut luar berseberangan. Besar sudut luar berseberangan adalah sama atau $\angle L2 = \angle K4$. Berikut adalah cara untuk menunjukkan besar sudut luar berseberangan adalah sama:

$\angle L2 = \angle L4$ karena sudut bertolak belakang

$\angle L4 = \angle K4$ karena sudut sehadap, maka:

$\angle L2 = \angle K4$.

Coba Anda temukan pasangan sudut luar berseberangan yang lain!

11) Sudut Dalam Sepihak

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L1$ dan $\angle K2$ disebut sudut dalam sepihak. Jumlah besar sudut dalam sepihak adalah 180° atau $\angle L1 + \angle K2 = 180^\circ$. Berikut adalah cara untuk menunjukkan jumlah besar sudut dalam sepihak adalah 180° :

$\angle L1 = \angle K1$ karena sudut sehadap

$\angle K1 + \angle K2 = 180^\circ$ karena sudut berpelurus, maka:

$$\angle L1 + \angle K2 = 180^\circ$$

Coba Anda temukan pasangan sudut dalam sepihak yang lain!

12) Sudut Luar Sepihak

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L2$ dan $\angle K1$ disebut sudut luar sepihak. Jumlah besar sudut luar sepihak adalah 180° atau $\angle L2 + \angle K1 = 180^\circ$.

Berikut adalah cara untuk menunjukkan jumlah besar sudut luar sepihak adalah 180° :

$\angle L2 = \angle K2$ karena sudut sehadap

$\angle K2 + \angle K1 = 180^\circ$ karena sudut berpelurus, maka:

$$\angle L2 + \angle K1 = 180^\circ$$

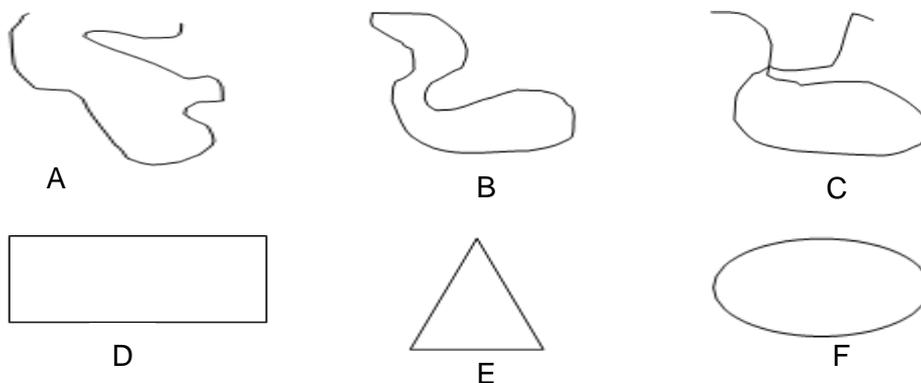
Coba Anda temukan pasangan sudut luar sepihak yang lain!

2. Materi 2 Segi Banyak (Poligon)

Sebelum membahas tentang segi banyak, maka kita akan mempelajari terlebih dahulu tentang kurva.

a. Kurva

Kurva adalah bangun geometri yang merupakan kumpulan semua titik yang digambar tanpa mengangkat pensil dari kertas. Kurva disebut juga dengan lengkungan merupakan bentuk geometri satu dimensi yang dapat terletak pada bidang atau ruang. Berikut ini adalah beberapa contoh gambar kurva.



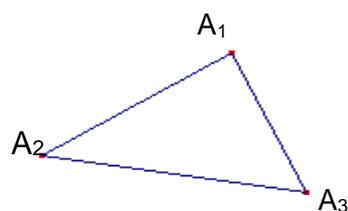
Gambar 51 Kurva

Terdapat dua jenis kurva, yaitu kurva terbuka dan kurva tertutup. Kurva terbuka dibagi menjadi dua bagian yaitu kurva terbuka sederhana dan kurva terbuka tidak sederhana. Kurva terbuka sederhana merupakan sebuah lengkungan yang titik awalnya tidak berimpit dengan titik akhirnya dan tidak terdapat titik potong pada lengkungan tersebut. Kurva terbuka tidak sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya dan titik akhirnya tidak berimpit dan terdapat titik potong pada lengkungan tersebut. Kurva tertutup dibagi menjadi kurva tertutup sederhana dan kurva tertutup tidak sederhana. Kurva tertutup tidak sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya saling berimpit dengan titik akhirnya dan terdapat titik potong pada lengkungan tersebut. Kurva tertutup sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya berimpit dengan titik akhirnya dan tidak ada titik potong pada lengkungan tersebut. Salah satu contoh kurva tertutup sederhana yang dibentuk dari beberapa segmen garis adalah polygon (segi banyak) (Contoh: lihat gambar D). Contoh segi banyak yang sederhana dan terdapat pada pembelajaran matematika di Sekolah Dasar (yang akan dibahas pada bagian selanjutnya adalah segitiga, segiempat, dan lingkaran).

Sebelum membahas mengenai macam-macam segi banyak pada bagian selanjutnya, maka akan dikemukakan terlebih dahulu tentang sisi dan titik sudut pada segitiga dan segiempat. Sisi merupakan batas terluar dari sebuah bangun datar atau garis yang membatasi sebuah bangun datar. Titik sudut dapat diartikan sebagai titik perpotongan antara tiga buah sisi.

b. Segitiga

Segitiga adalah poligon (segi banyak) yang memiliki tiga sisi. Segitiga merupakan bangun geometri yang dibentuk oleh tiga buah ruas garis yang berpotongan pada tiga titik sudut.

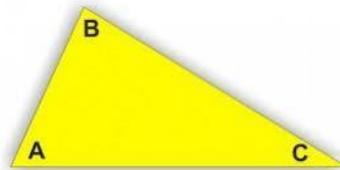


Gambar 52 Segitiga

Umumnya salah satu sisi segitiga disebut dengan alas. Alas segitiga merupakan salah satu sisi yang tegak lurus dengan tinggi segitiga. Tinggi segitiga merupakan garis yang tegak lurus dan melalui titik sudut yang berhadapan dengan alasnya.

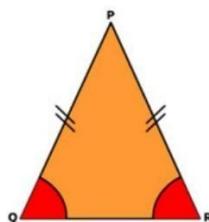
Segitiga dapat dikelompokkan berdasarkan panjang sisinya dan berdasarkan besar sudutnya. Berdasarkan panjang sisinya, segitiga dapat dibagi menjadi 3 (tiga).

- 1) **Segitiga sebarang**, adalah segitiga yang semua sisinya tidak sama panjang. Segitiga sebarang memiliki ciri-ciri sebagai berikut:
 - a) Panjang ketiga sisinya berlainan.
 - b) Besar ketiga sudutnya tidak sama.
 - c) Tidak memiliki simetri lipat.
 - d) Tidak mempunyai simetri putar.



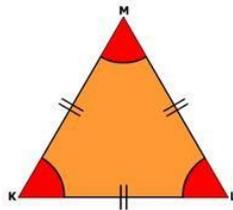
Gambar 53 Segitiga Sebarang

- 2) **Segitiga sama kaki**, adalah segitiga yang memiliki dua buah sisi yang sama panjang,
 - a) Segitiga sama kaki memiliki ciri-ciri sebagai berikut:
 - b) Dua buah sisinya sama panjang (panjang sisi PQ = panjang sisi PR).
 - c) Mempunyai dua buah sudut sama besar (sudut PQR = sudut PRQ).
 - d) Memiliki satu simetri lipat.
 - e) Tidak memiliki simetri putar



Gambar 54 Segitiga Sama Kaki

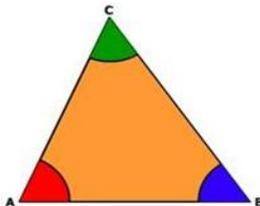
- 3) **Segitiga sama sisi**, adalah segitiga yang semua sisinya sama panjang. Segitiga sama sisi memiliki ciri-ciri sebagai berikut:
- Ketiga sisinya sama panjang (panjang sisi KL = panjang sisi LM = panjang sisi MK).
 - Sudut-sudutnya sama besar, yaitu masing-masing 60° (besar sudut MKL = besar sudut KLM = besar sudut LMK).
 - Memiliki tiga simetri lipat.
 - Memiliki tiga simetri putar.



Gambar 55 Segitiga Sama Sisi

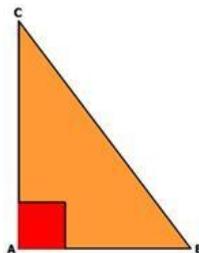
Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dapat dibagi menjadi 3 (tiga).

- 1) **Segitiga lancip**, adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip atau besar masing-masing sudutnya kurang dari 90° .



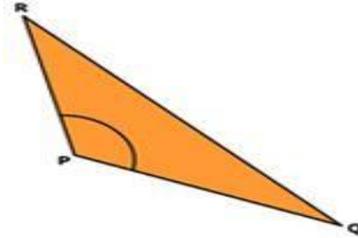
Gambar 56 Segitiga Lancip

- 2) **Segitiga siku-siku**, adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku atau besar salah satu sudutnya 90° .



Gambar 57 Segitiga Siku-Siku

- 3) **Segitiga tumpul**, adalah segitiga yang salah satu sudutnya tumpul atau salah satu sudutnya memiliki besar sudut antara 90^0 sampai 180^0 .



Gambar 58 Segitiga Tumpul

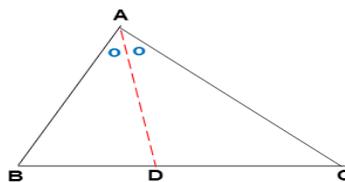
Tabel 3 Keterkaitan Antar Segitiga

Jenis Segitiga	Segitiga Lancip	Segitiga Tumpul	Segitiga Siku-siku
Segitiga sama sisi	Segitiga lancip sama sisi	-	-
Segitiga sama kaki	Segitiga lancip sama kaki	Segitiga tumpul sama kaki	Segitiga siku-siku sama kaki
Segitiga sebarang	Segitiga lancip sebarang	Segitiga tumpul sebarang	Segitiga siku-siku sebarang

Pada bagian selanjutnya akan dijelaskan mengenai garis istimewa pada segitiga. Terdapat 3 garis istimewa pada segitiga yang akan dibahas pada bagian ini, yaitu garis tinggi, garis bagi, dan garis berat.

1) Garis tinggi

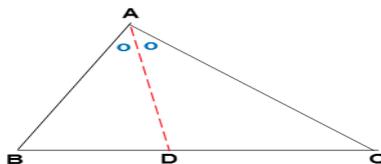
Garis tinggi merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya secara tegak lurus atau sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membentuk sudut 90^0 . Perhatikan gambar berikut ini, pada gambar tersebut garis CD merupakan salah satu garis tinggi pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis tinggi. Dapatkah Anda menemukan dan menggambar garis tinggi yang lain?



Gambar 59 Garis Tinggi

2) Garis bagi

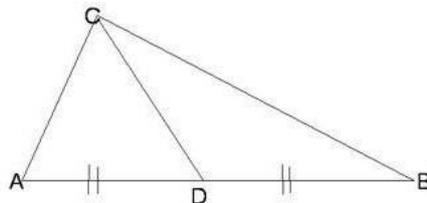
Garis bagi merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membagi sudut tersebut sama besar. Perhatikan gambar berikut ini, garis AD merupakan salah satu contoh garis bagi pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis bagi. Coba Anda gambarkan garis bagi yang lainnya!



Gambar 60 Garis Bagi

3) Garis berat

Garis berat merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membagi sisi dihadapannya sama panjang. Perhatikan gambar berikut ini, garis CD merupakan salah satu contoh garis berat pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis berat. Coba Anda gambarkan garis berat yang lainnya!



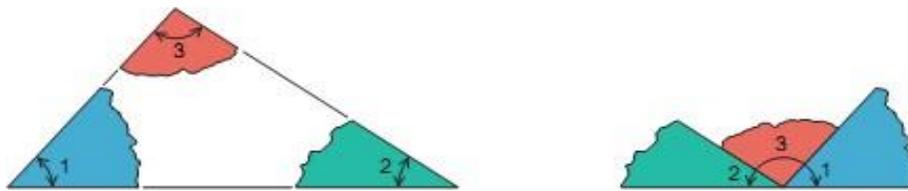
Gambar 61 Garis Berat

Pada segitiga sama sisi, garis tinggi akan sama dengan garis bagi dan juga sama dengan garis berat. Coba Anda buktikan hal tersebut!

Setelah Anda menemukan garis tinggi, garis berat, dan garis bagi yang lain, garis-garis tersebut berpotongan di satu titik tertentu, yang kemudian disebut dengan titik tinggi, titik berat, dan titik bagi. Kemudian, apa yang dimaksud dengan titik tinggi, titik bagi, dan titik berat!

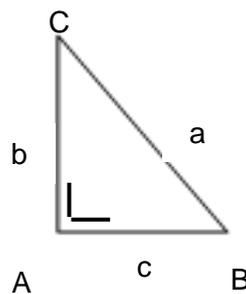
Setelah mempelajari tentang garis istimewa pada segitiga, selanjutnya adalah besar sudut pada segitiga. Besar seluruh sudut pada segitiga atau jumlah besar

sudut pada segitiga adalah 180° . Pembuktian besar seluruh sudut pada suatu segitiga 180° , dapat dilakukan dengan langkah berikut ini: Siswa diminta untuk menggambar sebuah segitiga (dengan ukuran bebas dalam arti tidak ditentukan oleh guru), kemudian siswa diminta untuk merobek daerah sudut pada masing-masing titik sudut segitiga (seperti pada gambar), dan menempelkannya sehingga terlihat bahwa membentuk sudut 180° .



Gambar 62 Jumlah Besar Sudut pada Segitiga

4) Dalil Pythagoras



Gambar 63 Segitiga Siku-Siku

Gambar tersebut adalah segitiga siku-siku ABC. Sisi AB dan AC adalah sisi siku-siku, sedangkan sisi BC disebut hipotenusa atau sisi miring.

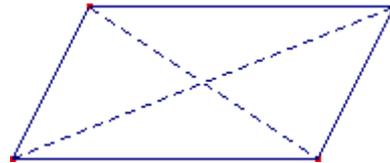
Dalil Pythagoras untuk segitiga siku-siku ABC di atas dirumuskan menjadi: $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 \leftrightarrow BC = \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2}$

c. Segiempat

Segiempat adalah poligon yang memiliki empat sisi. Segiempat dapat dibentuk dari empat buah garis dan empat buah titik dengan tiga titik tidak kolinear (tidak terletak pada satu garis lurus).

1) Jajargenjang

Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Jajargenjang dapat dibentuk dari gabungan suatu segitiga dan bayangannya setelah diputar setengah putaran dengan pusat titik tengah salah satu sisinya.



Gambar 64 Jajargenjang

Beberapa sifat jajargenjang, antara lain:

- pada setiap jajargenjang, sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
- pada setiap jajargenjang, sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- jumlah dua sudut yang berdekatan dalam jajargenjang adalah 180° .

Nah, bagaimana jika terdapat sebuah bangun jajargenjang tetapi besar salah satu sudutnya adalah 90° , apakah bangun tersebut adalah sebuah jajargenjang? Coba analisislah!

2) Persegi Panjang

Persegi panjang dapat didefinisikan sebagai segiempat yang kedua pasang sisinya sejajar dan sama panjang serta salah satu sudutnya 90° . Berdasarkan definisi persegi panjang dan jajargenjang yang telah dikemukakan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa persegi panjang adalah jajargenjang yang besar salah satu sudutnya 90° .

Beberapa sifat persegi panjang:

- sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
- setiap sudutnya sama besar, yaitu 90° .
- diagonal-diagonalnya sama panjang.
- diagonal-diagonalnya berpotongan dan saling membagi dua samapanjang.

3) Persegi

Persegi dapat didefinisikan sebagai segiempat yang semua sisinya sama panjang dan besar semua sudutnya 90° . Berdasarkan definisi persegi dan persegi panjang

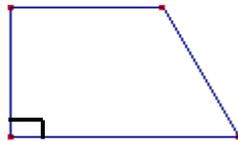
yang telah dikemukakan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa persegi adalah persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang. Beberapa sifat persegi adalah:

- a) sisi-sisinya sama panjang.
- b) diagonalnya sama panjang.
- c) diagonalnya saling berpotongan dan membagi dua sama panjang.
- d) sudut-sudut dalam setiap persegi dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.
- e) diagonal-diagonalnya merupakan sumbu simetri.
- f) diagonal-diagonalnya berpotongan tegak lurus.

4) Trapezium

Trapezium adalah segiempat yang memiliki sepasang sisi sejajar. Trapezium dapat dikelompokkan menjadi:

- a) *Trapezium siku-siku*, adalah trapezium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar dengan dua sudut yang besarnya 90^0 .



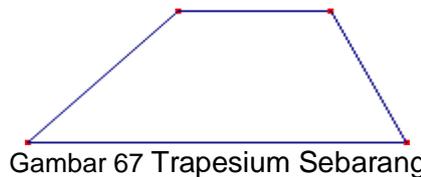
Gambar 65 Trapezium Siku-Siku

- b) *Trapezium sama kaki*, adalah trapezium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar dan sepasang sisi yang lain sama panjang.



Gambar 66 Trapezium Sama Kaki

- c) *Trapesium sebarang*, adalah trapesium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar yang tidak sama panjang serta besar sudutnya tidak ada yang 90° .

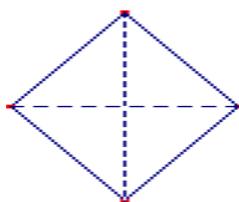


Gambar 67 Trapesium Sebarang

Pada suatu trapesium, jumlah sudut yang berdekatan adalah 180° .

5) Belah Ketupat

Belah ketupat merupakan segiempat yang khusus. Belah ketupat didefinisikan sebagai segiempat dengan sisi yang berhadapan sejajar, keempat sisinya sama panjang, dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Berdasarkan definisi tersebut, dan definisi pada jajargenjang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka dapat disebut belah ketupat merupakan jajargenjang yang semua sisinya sama panjang. Oleh karena itu, semua sifat yang berlaku pada jajargenjang berlaku pula pada belah ketupat. Keistimewaan belah ketupat adalah dapat dibentuk dari gabungan segitiga sama kaki dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap alasnya.



Gambar 68 Belah ketupat

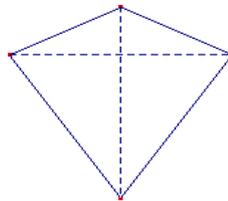
Berikut ini adalah sifat-sifat khusus belah ketupat:

- semua sisinya sama panjang.
- diagonal-diagonal belah ketupat menjadi sumbu simetri.
- kedua diagonalnya saling berpotongan tegak lurus dan saling membagi dua sama panjang.
- sudut-sudut yang berhadapan sama besar dan dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.

Nah, bagaimana jika terdapat sebuah bangun belah ketupat tetapi besar salah satu sudutnya adalah 90° , apakah bangun tersebut adalah sebuah belah ketupat? Coba analisislah!

6) Layang-layang

Layang-layang adalah segiempat yang mempunyai sisi yang berdekatan sama panjang dan kedua diagonalnya saling tegak lurus. Layang-layang dapat dibentuk dari dua segitiga sama kaki yang alasnya sama panjang dan saling berimpit atau dua segitiga sebarang yang kongruen dan berimpit pada alasnya. (definisi kongruen akan dibahas pada bab selanjutnya).



Gambar 69 Layang-Layang

Beberapa sifat layang-layang:

- pada setiap layang-layang sepasang sisinya sama panjang.
- pada setiap layang-layang terdapat sepasang sudut yang berhadapan sama besar.
- salah satu diagonal layang-layang merupakan sumbu simetri.
- salah satu diagonal layang-layang membagi dua sama panjang dan tegak lurus terhadap diagonal lainnya.

Contoh kasus

Berdasarkan paparan yang telah disajikan, menurut Anda apakah pernyataan berikut ini benar?

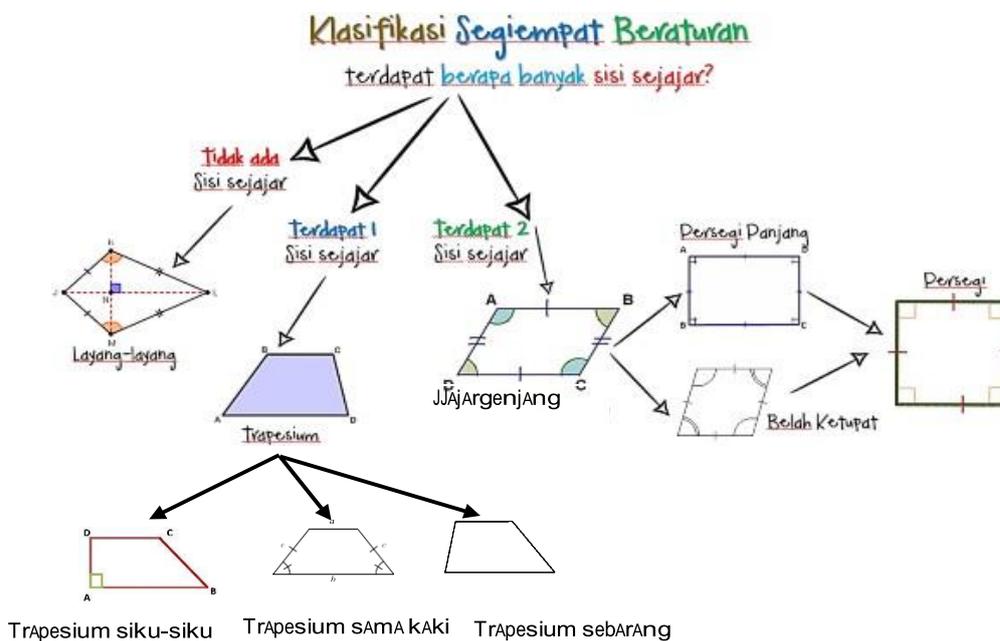
- Persegi merupakan bagian dari persegi panjang.
- Belah ketupat merupakan bagian dari persegi.
- Jajargenjang merupakan bagian dari persegi panjang.

Jawaban:

Pernyataan “persegi merupakan bagian dari persegi panjang” adalah benar. Alasannya adalah karena semua sifat pada persegi panjang juga merupakan

sifat pada persegi, yaitu pada persegi panjang berlaku sifat sepasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, pada persegi dapat berlaku hal tersebut. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, contohnya pada persegi berlaku sifat memiliki empat buah sisi yang sama panjang, sifat tersebut tidak berlaku pada persegi panjang. Kesimpulannya adalah pernyataan tersebut benar.

Berdasarkan contoh alasan pada poin a), Anda juga dapat menjawab poin b) dan poin c). Hubungan antara bangun datar yang dapat dilihat pada bagan berikut ini.

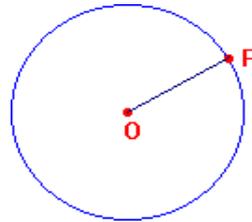


Gambar 70 Bagan Klasifikasi Segiempat Beraturan

Berdasarkan bagan tersebut, coba Anda definisikan dengan bahasa sendiri masing-masing bangun datar segiempat beraturan tersebut!

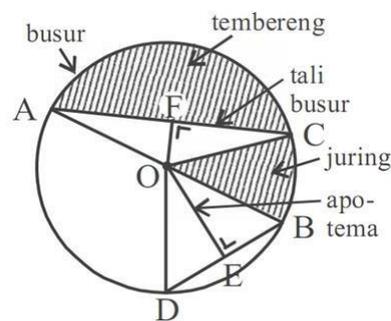
7) Lingkaran

Lingkaran merupakan kurva tertutup sederhana. Jika kita membuat sebuah segi- n beraturan dengan n tak terhingga maka akan membentuk sebuah lingkaran. Lingkaran dapat didefinisikan sebagai tempat kedudukan dari kumpulan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik pusat. Jarak titik P ke titik pusat O disebut dengan jari-jari lingkaran. Diameter sebuah lingkaran merupakan dua kali jari-jari lingkaran.



Gambar 71 Lingkaran

Berikut adalah gambar bagian-bagian dari lingkaran.



Gambar 72 Unsur-Unsur Lingkaran

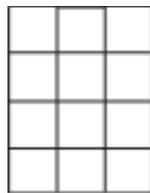
3. Materi 3 Kekongruenan dan Kesebangunan

Kekongruenan dan kesebangunan merupakan sebuah konsep geometri yang membahas tentang bentuk geometri yang sama dan serupa. Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menemukan bentuk geometri yang sama dan serupa, misalnya ubin yang dipasang pada lantai rumah kita biasanya berbentuk sama dan mempunyai ukuran yang sama. Hal inilah yang nantinya akan disebut dengan kekongruenan. Untuk lebih jelasnya akan dipaparkan pada bagian di bawah ini.

a. Kekongruenan

Kekongruenan merupakan sebuah konsep yang melibatkan dua atau lebih bangun geometri yang sama dan sebangun. Dua buah bangun geometri atau lebih dikatakan saling kongruen atau dapat dikatakan sama dan sebangun jika unsur- unsur yang bersesuaian pada bangun- bangun tersebut saling kongruen (sama dan sebangun).

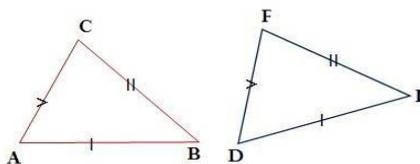
Dua segmen garis dikatakan saling kongruen apabila panjang atau ukuran kedua garis tersebut sama panjang. Dua buah sudut atau lebih dikatakan kongruen jika ukuran sudut-sudut tersebut sama. Dua bangun atau lebih dikatakan kongruen jika bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama serta sudut yang bersesuaian sama besar (sama dan sebangun). Perhatikan gambar di bawah ini, persegi pada gambar tersebut (yang nantinya disebut persegi satuan karena memiliki ukuran panjang sisi satu satuan panjang) memiliki bentuk yang sama dan ukuran yang sama besar, sehingga persegi-persegi tersebut saling kongruen.



Gambar 73 Ilustrasi Persegi-Persegi Kongruen

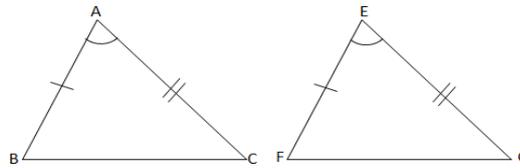
Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen apabila unsur-unsur (panjang sisi dan besar sudut) yang bersesuaian pada segitiga-segitiga tersebut sama dan sebangun. Dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut.

- 1) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang (sisi – sisi – sisi)



Gambar 74 Dua Segitiga Sebangun (sisi – sisi – sisi)

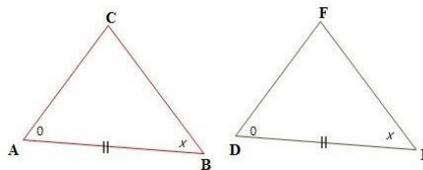
Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF, karena sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang. (coba Anda identifikasi sisi mana saja yang saling bersesuaian?) Dua sisi yang bersesuaian yang sama panjang dan sudut yang diapit sama besar (sisi – sudut – sisi)



Gambar 75 Dua Segitiga Sebangun (Sisi – Sudut – Sisi)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga EFG, karena:

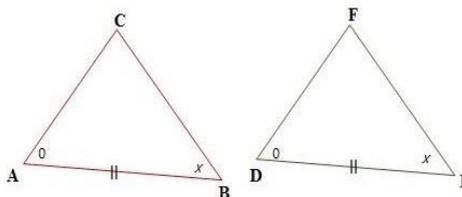
- a) Panjang sisi AB sama dengan panjang sisi EF (sisi).
 - b) Besar sudut BAC sama dengan besar sudut FEG (sudut).
 - c) Panjang sisi AC sama dengan panjang sisi EG (sisi).
- 2) Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang (sudut – sisi – sudut)



Gambar 76 Dua Segitiga Sebangun (Sisi – Sudut – Sisi)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga EFG, karena:

- a) panjang sisi AB sama dengan panjang sisi EF (sisi).
 - b) besar sudut BAC sama dengan besar sudut FEG (sudut).
 - c) panjang sisi AC sama dengan panjang sisi EG (sisi).
- 3) Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang (sudut – sisi – sudut)



Gambar 77 Dua Segitiga Sebangun (Sudut – Sisi – Sudut)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF, karena:

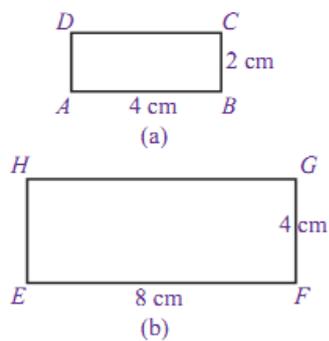
- besar sudut BAC sama dengan besar sudut EDF (sudut).
- panjang sisi AB sama dengan panjang sisi DE (sisi).
- besar sudut ABC sama dengan besar sudut DEF (sudut).

b. Kesebangunan

Dua buah bangun geometri dikatakan saling sebangun jika unsur-unsur yang bersesuaian saling sebanding. Dua atau lebih bangun dikatakan sebangun jika mempunyai syarat:

- Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan yang sama.
- Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.

Sebagai ilustrasinya perhatikan gambar di bawah ini:

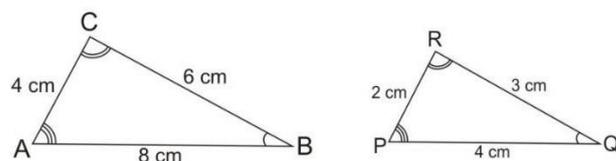


Gambar 78 Dua Persegi Panjang Sebangun

Pada gambar tersebut persegi panjang ABCD sebangun dengan persegi panjang EFGH, karena $AB : EF = BC : FG = CD : GH = DA : HE$.

Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:

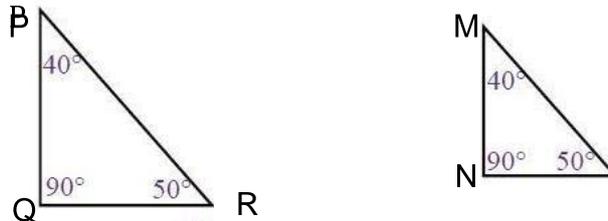
- Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama.



Gambar 79 Dua Segitiga Sebangun

Pada gambar tersebut diperoleh $AB : PQ = BC : QR = CA : RP$, sehingga dapat dikatakan bahwa segitiga ABC sebangun dengan segitiga PQR.

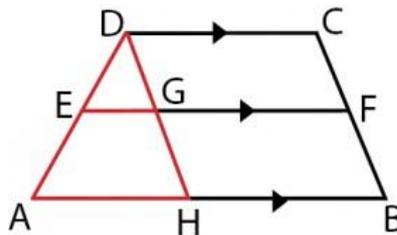
- 2) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar (sudut – sudut – sudut).



Gambar 80 Dua Segitiga Sebangun

Pada gambar tersebut diperoleh $\angle PQR = \angle MNO$, $\angle QRP = \angle NOM$, $\angle RPQ = \angle OMN$, sehingga dapat dinyatakan bahwa segitiga PQR sebangun dengan segitiga MNO.

Perhatikan gambar trapesium ABCD di bawah ini:



Gambar 81 Trapesium yang Sebangun

Pada gambar tersebut trapesium EFCD sebangun dengan trapesium ABCD, dan juga trapesium ABFE sebangun dengan trapesium ABCD. Misalkan berdasarkan gambar tersebut diketahui bahwa:

Panjang $AB = b$, panjang $CD = a$, panjang $CF = m$, panjang $FB = n$, maka bagaimanakah cara kita mencari panjang EF?

Untuk menentukan panjang EF, maka kita dapat membagi bangun trapesium tersebut menjadi bangun segitiga AHD dan jajargenjang HBCD. Pada bangun segitiga AHD terdapat dua buah segitiga yang sebangun, yaitu segitiga EGD sebangun dengan segitiga AHD. Begitupula pada jajargenjang HBCD, terdapat

dua buah jajargenjang yang sebangun yaitu jajargenjang GFCD sebangun dengan jajargenjang HBCD.

Pada keterangan sebelumnya diketahui bahwa:

- 1) Panjang $CD = a$, maka panjang $CD = GF = HB = a$, misalkan panjang $EG = y$ dan panjang $AH = x$.
- 2) Panjang $CF = DG = m$, dan panjang $CB = DH = CF + FB = m + n$ Langkah selanjutnya:
 - (a) Mencari panjang $EG = y$

Untuk mencari y perhatikan segitiga EGD dan segitiga AHD. Berdasarkan sifat dua buah bangun sebangun maka diperoleh perbandingan:

$$\frac{EG}{AH} = \frac{DG}{DH}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{m}{m+n}$$

$$y = \frac{mx}{m+n}$$

- (b) Mencari panjang $EF = EG + GF = y + a$

$$y + a = \frac{mx}{m+n} + a$$

$$= \frac{mx + a(m+n)}{m+n}$$

$$= \frac{mx + am + an}{m+n}$$

$$= \frac{(x+a)m + an}{m+n}$$

$$\text{atau } EF = \frac{(CD \times FB) + (AB + FB)}{CF + FB}$$

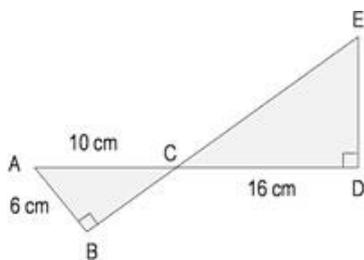
Contoh kasus:

- 1) Berdasarkan sifat dua buah bangun yang sebangun, menurut Anda apakah bangun segiempat pasti sebangun? (keterangan: segiempat yang dimaksud

adalah segiempat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya)

Jawab:

Bangun segiempat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya adalah persegi, persegi panjang, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang. Berdasarkan sifat-sifat bangun tersebut maka bangun-bangun yang pasti sebangun adalah persegi. Mengapa? Karena persegi memiliki sisi yang sama panjang, dan besar sudutnya masing-masing 90° , sehingga perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dan perbandingan sudut-sudut yang bersesuaian sama.



- 2) Perhatikan gambar berikut ini! Tentukanlah panjang ED!

Jawab:

Berdasarkan gambar tersebut:

- Besar sudut ABC sama dengan besar sudut CDE.
- Besar sudut BCA sama dengan besar sudut DCE (sudut bertolak belakang).
- Besar sudut BAC sama dengan besar sudut DEC.
- Panjang AC sebanding dengan CD.
- Panjang AB sebanding dengan panjang ED.

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{CD}$$

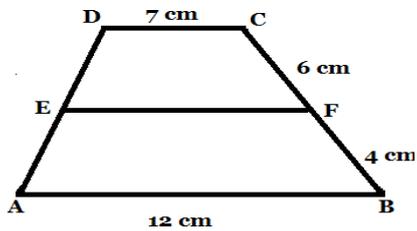
$$\frac{6}{ED} = \frac{10}{16}$$

$$ED = \frac{6 \times 16}{10}$$

$$ED = 9,6$$

Jadi, panjang ED adalah 9,6 cm.

3) Berdasarkan gambar di bawah ini, tentukan panjang EF!



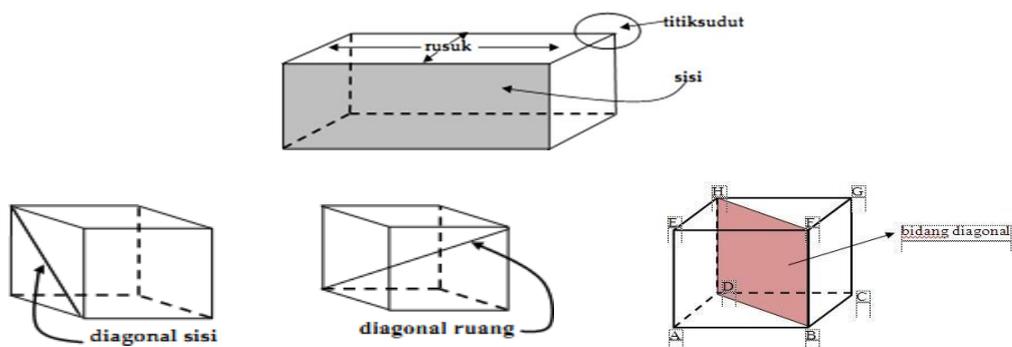
Jawab:

$$\begin{aligned}
 EF &= \frac{(CD \times BF) + (AB \times FC)}{BF + FC} \\
 &= \frac{(7 \times 4) + (12 \times 6)}{6 + 4} \\
 &= \frac{(28) + (72)}{10} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Jadi panjang EF adalah 10 cm.

4. Materi 4 Bangun Ruang

Bangun ruang merupakan bentuk geometri berdimensi tiga. Bangun ruang adalah bagian ruang yang dibatasi oleh himpunan titik-titik yang terdapat pada seluruh permukaan bangun tersebut. Permukaan yang dimaksud pada definisi tersebut atau permukaan yang membatasi bangun ruang adalah bidang atau sisi. Perpotongan dari dua buah sisi adalah rusuk. Perpotongan tiga buah rusuk atau lebih adalah titik sudut. Bidang atau sisi, rusuk, dan titik sudut merupakan contoh dari unsur-unsur bangun ruang.

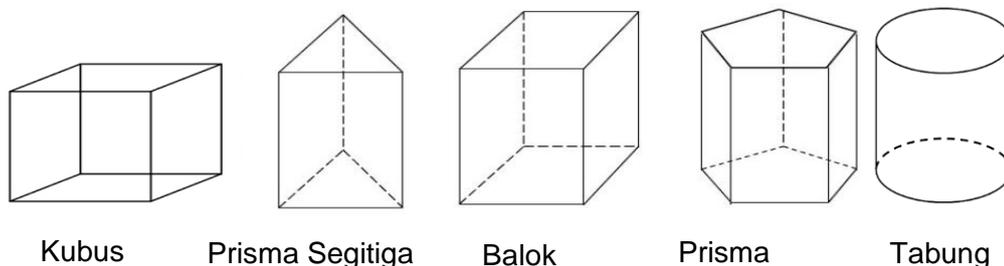


Gambar 82 Unsur – Unsur Bangun Ruang

Selain bidang atau sisi, rusuk, dan titik sudut, unsur bangun ruang yang lain adalah diagonal sisi atau diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal. Diagonal sisi atau diagonal bidang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang berhadapan pada sebuah sisi. Diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan pada sebuah ruang. Bidang diagonal adalah bidang yang dihubungkan oleh dua buah diagonal sisi yang sejajar.

a. Prisma

Prisma adalah bangun ruang yang dibentuk oleh dua daerah polygon kongruen yang terletak pada bidang sejajar, dan tiga atau lebih daerah persegi panjang yang ditentukan oleh sisi-sisi dua daerah polygon tersebut sedemikian hingga membentuk permukaan tertutup sederhana. Dua daerah polygon kongruen yang terletak pada bidang sejajar dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain-lain. Dengan kata lain, prisma merupakan sebuah bangun ruang yang dibatasi oleh dua buah bangun datar yang kongruen sebagai alas dan tutup dan beberapa buah persegi panjang.



Gambar 83 Macam-Macam Prisma

Penamaan sebuah prisma, umumnya mengikuti bentuk alasnya. Alas prisma dan tutup prisma kongruen. Sebuah prisma yang memiliki dua buah segitiga yang kongruen (alas dan tutup) dinamakan prisma segitiga. Sebuah prisma yang memiliki dua buah segiempat yang kongruen dinamakan prisma segiempat. Sebuah prisma yang memiliki tiga pasang sisi yang kongruen (berbentuk persegi panjang) dinamakan balok. Sebuah prisma yang semua sisinya kongruen dinamakan kubus. Sebuah prisma yang alas dan tutupnya berbentuk segi- n dengan n tak hingga atau yang disebut lingkaran dinamakan tabung.

Pada bangun ruang sisi datar, terdapat hubungan antara banyaknya sisi, banyaknya titik sudut dan banyaknya rusuk. Hubungan tersebut dinamakan Kaidah Euler. Kaidah Euler menyatakan bahwa:

“banyaknya sisi ditambah dengan banyaknya titik sudut adalah sama dengan banyaknya rusuk ditambah dengan dua atau $S + T = R + 2$ ”.

Perhatikan Tabel Kaidah Euler berikut ini:

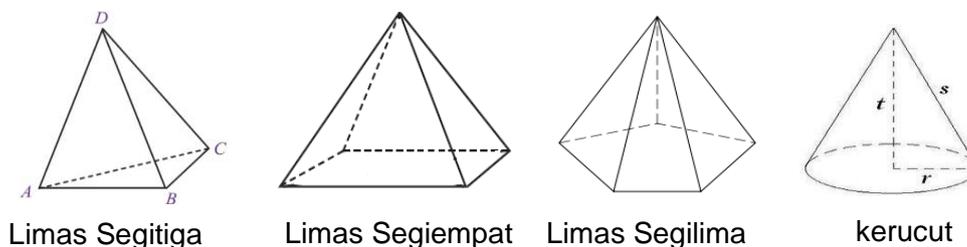
Tabel 4 Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Prisma

Nama Bangun Ruang	Banyak Sisi	Banyak Titik Sudut	Banyak Rusuk
Kubus	6	...	12
Balok	...	8	...
Prisma segitiga	5	6	...
Prisma segiempat	...	8	12
Prisma segilima	7
Prisma segi n	$n + 2$	$2n$	$3n$
Tabung	Tak berhingga	Tak berhingga	Tak berhingga

Cobalah Anda tentukan banyak sisi, titik sudut, dan rusuk yang lainnya.

b. Limas

Limas merupakan sebuah bangun ruang yang memiliki alas segi- n dan sisi selimut berbentuk segitiga yang bertemu pada satu titik puncak. Limas adalah bidang banyak yang ditentukan oleh daerah polygon (yang disebut alas), suatu titik yang tidak terletak pada bidang polygon dan segitiga-segitiga yang ditentukan oleh titik tersebut dan sisi-sisi dari polygon.



Gambar 84 Macam – Macam Limas

Alas-alas dari suatu limas dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain lain. Penamaan limas bergantung pada jenis alasnya. Sebuah limas yang alasnya berbentuk lingkaran disebut kerucut.

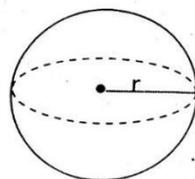
bel 5 Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Limas

Nama Bangun Ruang	Banyak Sisi	Banyak Titik Sudut	Banyak Rusuk
Limas segitiga	4	...	6
Limas segiempat	...	5	...
Limas segilima	6
Limas segi n	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
Kerucut	Tak berhingga	Tak berhingga	Tak berhingga

Cobalah Anda lengkapi Tabel 3 tersebut!

c. Bola

Bola merupakan salah satu bangun geometri. Bola merupakan bangun ruang tiga dimensi yang dibentuk oleh tak hingga lingkaran berjari-jari sama panjang dan berpusat pada satu titik yang sama.



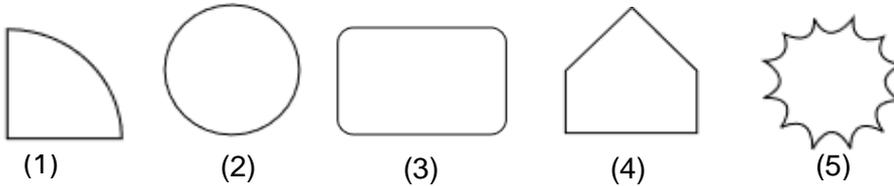
Gambar 85 Bola

Pemanfaatam dalam kehidupan sehari-hari geometri ini sangat terkait erat dengan penhgukuran. Dari uraian di atas, tampak bahwa geometri lebih membahas tentang unsur-unsur bangun. Dengan demikian terapan dalam kehidupan sehari-hari

Berikut ini, contoh soal untuk materi segibanyak dan unsur-unsur lingkaran. Anda dapat mendiskusikan jawaban dari soal-soal tersebut dengan rekan-rekan sejawat.

Contoh 1

Manakah di antara bangun-bangun berikut yang merupakan segi banyak?



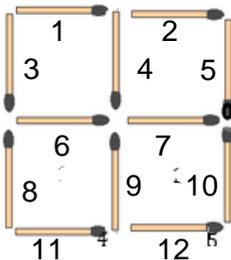
Pembahasan

Bangun segibanyak atau polygon semua sisinya merupakan garis lurus.

Bangun pertama memiliki 1 sisi lengkung, bangun kedua hanya punya sisi lengkung, bangun ketiga 4 sisinya lengkung, dan bangun kelima semua sisinya juga lengkung. Jadi yang merupakan segi banyak adalah bangun ke-4, yaitu segilima tidak beraturan.

Contoh 2

Korek api mana yang harus di ambil agar hanya terdapat dua segiempat saja?



Apakah korek api 1 dan 2

Apakah korek api 4 dan 5

Apakah korek api 6 dan 7

Apakah korek api 6 dan 9

D. Rangkuman

1. Dasar–Dasar Geometri

- a. Pada geometri, terdapat beberapa istilah, yaitu: (1) unsur yang tidak didefinisikan, (2) unsur yang didefinisikan, (3) aksioma/postulat, (4) teorema/dalil/rumus.
- b. Unsur yang tidak didefinisikan merupakan konsep yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, contoh titik, garis.
- c. Unsur yang didefinisikan merupakan konsep yang dikembangkan dari unsur yang tidak didefinisikan dan merupakan konsep yang memiliki batasan, contoh sinar garis, ruas garis, segitiga.
- d. Aksioma/postulat merupakan konsep yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan kebenarannya, contoh postulat garis sejajar.
- e. Teorema/dalil/rumus adalah konsep yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif, contoh Teorema Pythagoras.
- f. Titik merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Titik merupakan konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran dan berat. Titik disimbolkan dengan noktah.
- g. Garis merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan.
- h. Sinar garis merupakan bagian dari garis yang memanjang ke satu arah dengan panjang tidak terhingga.
- i. Ruas garis merupakan bagian dari garis yang dibatasi oleh dua buah titik di ujung dan pangkalnya.
- j. Dua garis g dan h dikatakan sejajar ($g \parallel h$) jika kedua garis tersebut tidak mempunyai titik sekutu (titik potong).
- k. Melalui sebuah titik P di luar sebuah garis g , ada tepat satu garis h yang sejajar dengan g .
- l. Bidang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga bidang termasuk unsur yang tidak didefinisikan.
- m. Ruang diartikan sebagai unsur geometri dalam konteks tiga dimensi.

- n. Sudut merupakan gabungan dari sinar garis yang berhimpit di titik pangkalnya.

2. Segi Banyak

- a. Kurva adalah bangun geometri yang merupakan kumpulan semua titik yang digambar tanpa mengangkat pensil dari kertas.
- b. Terdapat dua jenis kurva, yaitu kurva tertutup sederhana dan tidak sederhana serta kurva tidak tertutup sederhana dan tidak sederhana.
- c. Segitiga adalah poligon yang memiliki tiga sisi.
- d. Alas dan tinggi segitiga selalu tegak lurus
- e. Segitiga sebarang, adalah segitiga yang semua sisinya tidak sama panjang.
- f. Segitiga sama kaki, adalah segitiga yang memiliki dua buah sisi yang sama panjang,
- g. Segitiga sama sisi, adalah segitiga yang semua sisinya sama panjang.
- h. Segitiga lancip, adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.
- i. Segitiga siku-siku, adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku.
- j. Segitiga tumpul, adalah segitiga yang salah satu sudutnya tumpul.
- k. Segiempat adalah poligon yang memiliki empat sisi.
- l. Trapesium adalah segiempat yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar.
- m. Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- n. Belah ketupat didefinisikan sebagai segiempat dengan sisi yang berhadapan sejajar, keempat sisinya sama panjang, dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- o. Persegi panjang adalah jajargenjang yang besar keempat sudutnya 900.
- p. Persegi adalah persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang.

- q. Layang-layang adalah segiempat yang mempunyai sisi yang berdekatan sama panjang dan kedua diagonalnya saling tegak lurus.
- r. Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik (pusat lingkaran).

3. Kesebangunan dan Kekongruenan

- a. Dua atau lebih bangun dikatakan sebangun jika mempunyai syarat:
 - b. Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan yang sama.
 - c. Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.
- d. Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:
 - e. Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama (sisi – sisi – sisi).
 - f. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar (sudut – sudut – sudut).
- g. Dua bangun atau lebih dikatakan kongruen jika bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama serta sudut yang bersesuaian sama besar (sama dan sebangun).
- h. Dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:
 - i. Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang (sisi – sisi – sisi)
 - j. Dua sisi yang bersesuaian sama panjang dan besar sudut yang diapit sama besar (sisi – sudut – sisi)
 - k. Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang.

4. Bangun Ruang

- a. Bangun ruang adalah bagian ruang yang dibatasi oleh himpunan titik-titik yang terdapat pada seluruh permukaan bangun.

- b. Permukaan bangun ruang berbentuk bangun datar biasa disebut dengan bidang atau sisi.
- c. Perpotongan dari dua buah sisi adalah rusuk.
- d. Perpotongan tiga buah rusuk atau lebih adalah titik sudut.
- e. Diagonal sisi atau diagonal bidang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang berhadapan pada sebuah sisi.
- f. Diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan pada sebuah ruang.
- g. Kaidah Euler menyatakan bahwa banyaknya sisi ditambah dengan banyaknya titik sudut adalah sama dengan banyaknya rusuk ditambah dengan 2.

Pembelajaran 4. Pengukuran

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi pengukuran.
2. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah materi pengukuran serta kehidupan sehari-hari.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran panjang.
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keliling bangun datar.
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan luas bangun datar.
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan volume bangun ruang.
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan debit.
6. Memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan jarak, waktu, dan kecepatan.

C. Uraian Materi

Pada materi ini, akan dibahas tentang: panjang, keliling, dan keliling bangun datar serta luas permukaan dan volum bangun ruang, debit, dan kecepatan.

1. Materi 1: Panjang, Keliling, dan Luas Bangun Datar

Pada materi 1 ini, akan dibahas tentang pengukuran panjang, keliling dan luas bangun datar.

a. Pengukuran Panjang

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai pengukuran panjang, maka akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai pengukuran. Pengukuran merupakan sebuah proses atau suatu kegiatan untuk mengidentifikasi besar kecilnya, panjang pendeknya, atau berat ringannya suatu objek. Pengukuran dalam modul ini meliputi pengukuran panjang, luas, volume, dan berat (yang akan dibahas secara bertahap). Pengukuran panjang dapat dilakukan dengan menggunakan satuan tidak baku dan dengan menggunakan satuan baku.

1) Pengukuran Tidak Baku

Pengukuran panjang dengan menggunakan satuan tidak baku merupakan sebuah pengukuran yang memungkinkan perbedaan hasil karena menggunakan alat ukur yang tidak standar. Beberapa contoh pengukuran dengan menggunakan satuan tidak baku untuk mengukur panjang antara lain sebagai berikut.

- a) Jengkal adalah pengukuran yang disesuaikan dengan jarak paling panjang antara ujung ibu jari tangan dengan ujung jari kelingking.
- b) Hasta adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran sepanjang lengan bawah dari siku sampai ujung jari tengah.
- c) Depa adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran sepanjang kedua belah tangan dari ujung jari tengah kiri sampai ujung jari tengah kanan.
- d) Kaki adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah kaki.
- e) Tapak adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah tapak.
- f) Langkah adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah langkah.

Mengajarkan pengukuran menggunakan satuan tidak baku pada siswa dapat kita mulai dengan meminta siswa mengukur panjang meja dengan menggunakan

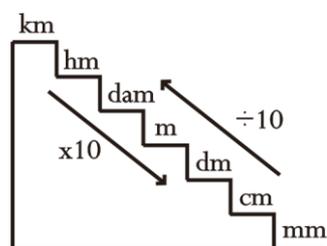
jengkal ataupun depa. Hasil yang diperoleh siswa tentulah berbeda-beda sesuai dengan ukuran masing-masing.

2) Pengukuran Baku

Pengukuran dengan menggunakan satuan baku merupakan sebuah pengukuran yang hasilnya tetap atau standar. Terdapat dua acuan pengukuran baku yang digunakan yaitu pengukuran sistem Inggris dan pengukuran sistem Metrik. Pengukuran sistem Inggris dikembangkan dari benda-benda yang ada di sekitar kita dan telah distandarkan. Beberapa contoh satuan baku pengukuran panjang sistem Inggris antara lain yard, feet, dan inchi. Beberapa contoh satuan baku pengukuran berat dan volume sistem Inggris antara lain pound, cup, dan gallon. Pembelajaran di Sekolah Dasar di Indonesia lebih menggunakan pengukuran baku sistem metrik. Sistem metrik dikembangkan secara sistematis dan memiliki standar.

Satuan baku yang berlaku untuk mengukur panjang sebuah benda ataupun jarak adalah kilometer (km), hektometer (hm), dekameter (dam), meter (m), desimeter (dm), centimeter (cm), dan millimeter (mm). Mengajarkan pengukuran panjang pada siswa Sekolah Dasar dapat dimulai dengan meminta siswa mengukur benda-benda di sekitar menggunakan penggaris ataupun alat meteran. Misalkan siswa diminta untuk mengukur sebuah meja menggunakan penggaris dan alat meteran. Hasil pengukuran menggunakan penggaris adalah $100cm$, dan hasil pengukuran menggunakan alat meteran adalah $1m$, berdasarkan hasil tersebut siswa dapat menyimpulkan bahwa $1m = 100cm$.

Perhatikan bagan di bawah ini!



Gambar 86 Bagan Konversi Satuan Panjang

Mengkonversi satuan panjang dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran panjang maka dikalikan 10, dan setiap naik 1 satuan ukuran panjang maka dibagi 10.

Seorang siswa saat belajar tentang pengukuran panjang diharapkan dapat menguasai hukum kekekalan panjang. Seorang siswa dikatakan memahami hukum kekekalan panjang jika saat siswa dapat menyimpulkan bahwa panjang seutas tali akan tetap meskipun tali tersebut dilengkungkan (seperti ilustrasi gambar berikut ini).



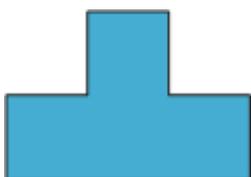
Gambar 87 Ilustrasi Hukum Kekekalan Panjang

b. Keliling Bangun Datar



Perhatikan gambar kurva disamping! Jika diperhatikan, saat menggambar kurva tersebut, sebuah titik akan bergerak mengelilingi kurva dari awal sampai bertemu lagi di titik awal tadi. Jarak perpindahan titik tersebut yang kita sebut sebagai keliling.

Keliling adalah jarak perpindahan titik dari lintasan awal sampai ke lintasan akhir (titik awal dan titik akhir adalah titik yang sama). Untuk mengilustrasikan konsep keliling, kita bisa mengajak siswa untuk membayangkan atau menceritakan saat sedang berlari mengelilingi lapangan. Keliling lapangan akan sama dengan jarak tempuh siswa mengelilingi lapangan dari titik awal sampai kembali lagi ke titik tersebut.



Nah, sekarang bagaimana jika terdapat sebuah kasus, misalkan siswa akan diminta untuk mengukur jarak yang ditempuhnya untuk mengelilingi taman (misalkan tamannya berbentuk seperti gambar di samping).

Hal yang mungkin dilakukan siswa adalah mengukur jarak setiap sisi taman

kemudian menjumlahkannya. Dapat disimpulkan bahwa keliling adalah jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun. Hal ini otomatis berlaku juga untuk semua jenis bangun datar, sehingga pada bahasan ini penulis tidak secara khusus membahas rumus keliling setiap jenis segitiga dan segiempat.

Menghitung keliling pada segitiga dan segiempat dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan semua panjang sisi terluarnya.

Kasus berbeda terjadi saat kita ingin menentukan keliling lingkaran. Saat menentukan keliling lingkaran, definisi keliling yang merupakan jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun agaklah tidak tepat. Untuk menentukan keliling lingkaran, kita dapat mengajak siswa melakukan langkah- langkah sebagai berikut.

- 1) Siswa kita minta untuk menyiapkan beberapa benda yang permukaannya berbentuk lingkaran.
- 2) Siswa mengukur panjang diameter dari setiap benda.
- 3) Siswa mengukur panjang keliling lingkaran dengan menggunakan tali.
- 4) Siswa mencatat semua hasil pengukuran yang dilakukan, misalnya dapat berupa tabel seperti di bawah ini.

Tabel 6 Keliling Lingkaran

No	Nama Benda	Diameter (d)	Keliling	$\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$
1				
2				
...				
dst				

- 5) Siswa menentukan $\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$ dan rata-rata dari data tersebut (pada langkah ini hasil yang diharapkan adalah yang mendekati nilai phi ($\pi = 3,14 \dots = \frac{22}{7}$, mengapa mendekati? Karena memungkinkan saat pengukuran diameter dan keliling dengan bantuan tali terdapat sedikit kesalahan pengukuran).

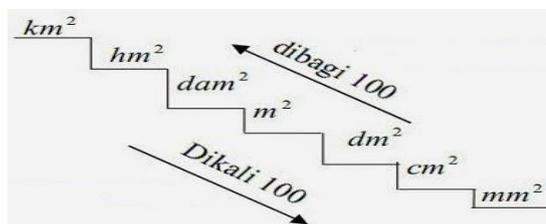
$$\text{Karena } \pi = \frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}, \text{ maka Keliling} = \pi \times \text{diameter} = \pi d = 2\pi r$$

c. Pengukuran Luas

Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur luas adalah km^2 , hm^2 , dam^2 , m^2 , dm^2 , cm^2 , mm^2 .

Mengkonversi satuan luas dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran luas maka dikalikan 100, dan setiap naik 1 satuan ukuran luas maka dibagi 100.

Perhatikan bagan di bawah ini.

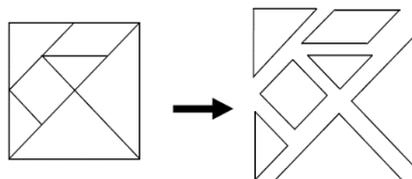


Gambar 88 Bagan Konversi Satuan Luas

Selain satuan baku yang telah disebutkan, satuan baku lain untuk mengukur luas adalah *are* dan *hektar (ha)*. 1 *are* merupakan satuan dasar untuk mengukur luas yang setara dengan ukuran $100 m^2$ atau $1 \text{ are} = 100 m^2$ dan 1 *hektar* merupakan satuan untuk mengukur luas yang setara dengan $10.000 m^2$ atau $1 \text{ hektar} = 10000 m^2$.

Setelah memahami pengukuran luas, diharapkan siswa dapat memahami hukum kekekalan luas. Siswa yang sudah menguasai hukum kekekalan luas akan menyatakan bahwa luas daerah yang ditutupi suatu benda tetap sama meskipun letak bendanya diubah.

Perhatikan gambar tangram berikut ini.

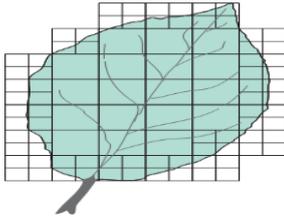


Gambar 89 Tangram

Siswa yang telah menguasai hukum kekekalan luas akan menyatakan bahwa luas daerah persegi (gambar sebelah kiri) akan sama dengan jumlah luas daerah bangun-bangun yang terdapat di sebelah kanan.

d. Luas Daerah Bangun Datar

Konsep luas sering kita dengar dan gunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalkan jika seseorang akan menjual tanah maka ukuran yang digunakan adalah luas. Luas adalah sesuatu yang menyatakan besarnya daerah sebuah kurva tertutup sederhana.



Sebagai contohnya, bagaimanakah cara kita membimbing siswa menghitung luas daun seperti pada gambar disamping?

Untuk menghitung luas daun tersebut tentulah tidak mudah. Langkah pertama yang dapat kita lakukan adalah meminta siswa untuk menjiplak daun tersebut pada kertas berpetak satu satuan. Kemudian siswa akan menghitung berapa banyak persegi satuan yang tertutup oleh bangun tersebut (dengan aturan jika setengah petak atau yang tertutup maka akan dihitung satu satuan luas, dan jika kurang dari setengah petak yang tertutup maka akan kita abaikan), walaupun hasil yang diperoleh tidak sama persis (mendekati) dengan luas daun sebenarnya.

Luas adalah sebuah ukuran yang menyatakan besarnya daerah kurva atau bangun datar.

Mempelajari konsep luas, siswa juga diharapkan dapat memahami hukum kekekalan luas. Siswa yang sudah memahami hukum kekekalan luas dapat menyimpulkan bahwa luas daerah yang ditutupi suatu benda akan tetap sama meskipun letaknya diubah. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar pembuktian luas jajargenjang.

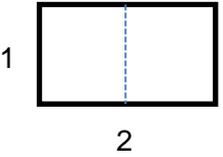
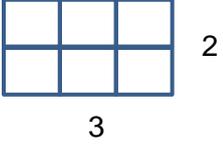
1) Luas Daerah Persegi Panjang

Luas daerah persegi panjang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi persegi panjang tersebut. Untuk membantu siswa menemukan rumus luas daerah persegi panjang, salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan langkah-langkah seperti ditunjukkan dalam tabel 7 di bawah.

Setelah mengisi tabel 7, siswa kemudian diminta untuk mengidentifikasi hubungan antara panjang sisi dengan banyak persegi satuan yang menutupinya. Setelah menemukan hubungannya, siswa dapat menuliskan bahwa:

$$\text{Luas daerah persegi} = \text{sisi} \times \text{sisi}$$

Tabel 7 Rumus Luas Persegi Panjang

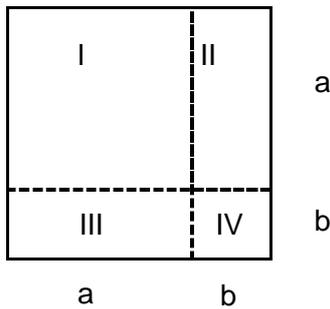
Persegi Panjang	Panjang (p)	Lebar (l)	Persegi Satuan	Keterangan
	2	1	2	Jika diketahui panjangnya 2 dan lebarnya 1, maka persegi satuannya 2. Mengapa demikian? Kita buktikan dengan cara menghitung persegi satuannya, yaitu 2 dihasilkan dari 2 dikali 1
	2	3	6	<i>Menurut Anda mengapa banyak persegi satuan ada 6?</i>
Selanjutnya dapat dilanjutkan sendiri.				

Contoh kasus:

Tentukan luas persegi jika panjang sisi persegi tersebut adalah $(a + b)$!

Jawab:

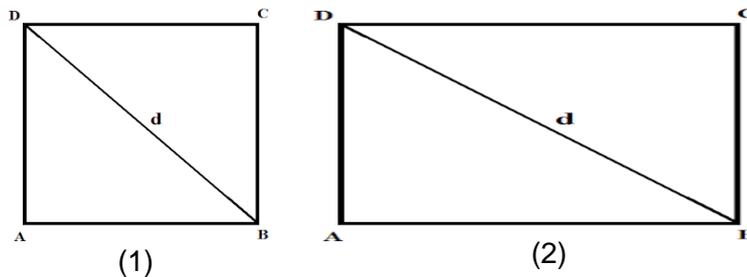
Untuk menentukan luas persegi tersebut, perhatikan gambar berikut ini.



$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \text{Luas I} + \text{Luas II} + \text{Luas III} + \text{Luas IV} \\ (a + b)(a + b) &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

2) Luas Daerah Segitiga

Luas daerah segitiga adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi segitiga tersebut.



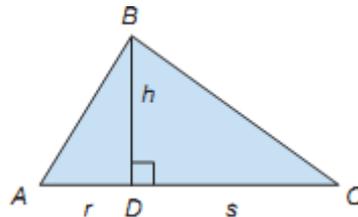
Gambar 90 Ilustrasi Luas Segitiga Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Perhatikan kedua bangun tersebut, segitiga (1) dan segitiga (2). Mengajarkan luas daerah segitiga, kita dapat meminta siswa menggambarkan sebuah persegi panjang, kemudian persegi panjang tersebut dipotong menurut salah satu diagonalnya (perhatikan gambar di atas), siswa akan mendapatkan dua buah segitiga dengan ukuran dan besar yang sama persis. Untuk menghitung luas daerah segitiga, dapat diperoleh dari persegi panjang yang dibagi dua berdasarkan salah satu diagonalnya.

Luas segitiga adalah setengah dari luas persegi panjang.

$$\begin{aligned} L_{ABD} &= \frac{1}{2} L_{ABCD} \\ &= \frac{1}{2} AB \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} \end{aligned}$$

Perhatikan gambar segitiga sebarang berikut ini.



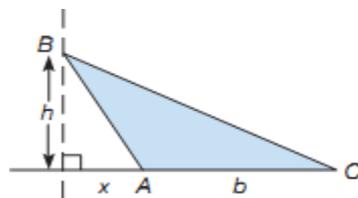
Gambar 91 Ilustrasi Luas Segitiga

Menentukan luas daerah segitiga tersebut, dapat dilakukan dengan cara:

$$\begin{aligned}
 L_{ABC} &= L_{ABD} + L_{CBD} \\
 &= \frac{1}{2}(AD)(BD) + \frac{1}{2}(CD)(BD) \\
 &= \frac{1}{2}(AD + CD)(BD) \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}
 \end{aligned}$$

Catatan: ingat kembali tentang bahasan garis tinggi pada bagian sebelumnya, dapat dituliskan “alas segitiga selalu tegak lurus dengan tinggi segitiga”.

Perhatikan gambar segitiga tumpul berikut ini!



Gambar 92 Ilustrasi Luas Segitiga Tumpul

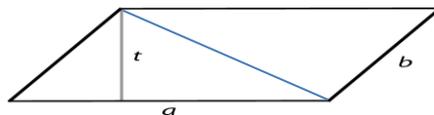
Menentukan luas segitiga tersebut, dapat dilakukan dengan cara:

$$\begin{aligned}
 L_{ABC} &= L_{LCB} - L_{LAB} \\
 &= \frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi}) - \frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi}) \\
 &= \frac{1}{2}(x + b)(h) - \frac{1}{2}(x)(h) \\
 &= \frac{1}{2}(x)(h) + \frac{1}{2}(b)(h) - \frac{1}{2}(x)(h) \\
 &= \frac{1}{2}(b)(h) \\
 &= \frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi})
 \end{aligned}$$

3) Luas Daerah Jajargenjang

Luas daerah jajargenjang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi jajargenjang tersebut.

Menentukan luas daerah jajargenjang kita dapat menggunakan bantuan konsep luas daerah segitiga. Misalkan guru meminta siswa untuk menggambar sebuah

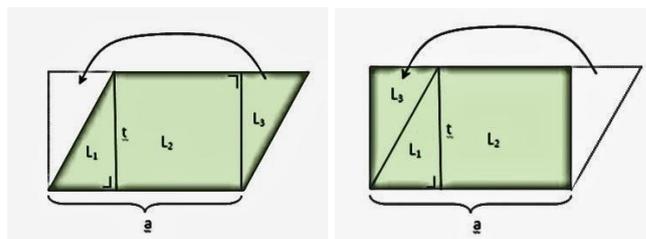


jajargenjang, kemudian jajargenjang tersebut dipotong berdasarkan salah satu diagonalnya sehingga menjadi dua buah segitiga yang sama persis. Dengan kata lain luas daerah jajargenjang sama dengan dua kali luas segitiga. Secara matematis adalah sebagai berikut.

Gambar 93 Ilustrasi Luas Jajar genjang Berdasarkan Luas Segitiga

$$\begin{aligned}
 L_{\text{jajargenjang}} &= 2 \times L_{\Delta} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} \times a \times t \\
 &= a \times t
 \end{aligned}$$

Selain menggunakan bantuan konsep luas daerah segitiga, kita juga dapat menggunakan bantuan konsep luas daerah persegi panjang. Proses yang dapat dilakukan siswa adalah sebagai berikut: siswa menggambar sebuah jajargenjang, jajargenjang tersebut dibagi menjadi 3 daerah, dua buah segitiga, dan satu persegi panjang. Apabila salah satu segitiga dipotong dan ditempelkan sehingga sisi miring dua buah segitiga tersebut saling berhimpit, maka akan terbentuk sebuah persegi panjang baru (perhatikan gambar di bawah ini). Dengan kata lain, luas jajargenjang akan sama dengan luas persegi panjang dengan ukuran alas dan tinggi yang sama dengan alas dan tinggi jajargenjang tersebut.



**Gambar 94 Ilustrasi Luas Daerah Jajargenjang
Berdasarkan Luas Persegi Panjang**

Berdasarkan gambar tersebut:

Luas daerah jajargenjang = luas daerah persegi panjang

$$p \times l = a \times t$$

$$L_{\text{daerah jajargenjang}} = a \times t$$

Saat kita mengajarkan proses menemukan luas jajargenjang seperti cara di atas, dan siswa dapat memahaminya, artinya siswa telah menguasai hukum kekekalan luas.

Jadi, untuk setiap jajargenjang, dengan alas a , tinggi t , serta luas daerah L , maka berlaku:

$$L_{\text{daerah jajargenjang}} = a \times t.$$

4) Luas Daerah Belah Ketupat

Luas daerah belah ketupat adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi belah ketupat tersebut.

Untuk menemukan rumus luas daerah belah ketupat guru dapat membimbing siswa dengan cara: siswa diminta menggambar belah ketupat beserta diagonal-diagonalnya, sehingga akan membentuk 4 daerah segitiga (perhatikan gambar), keempat segitiga tersebut disusun sehingga menjadi sebuah persegi panjang dengan panjang sama dengan diagonal 1 belah ketupat dan lebar sama dengan $\frac{1}{2}$ diagonal 2 belah ketupat. Dapat ditulis:

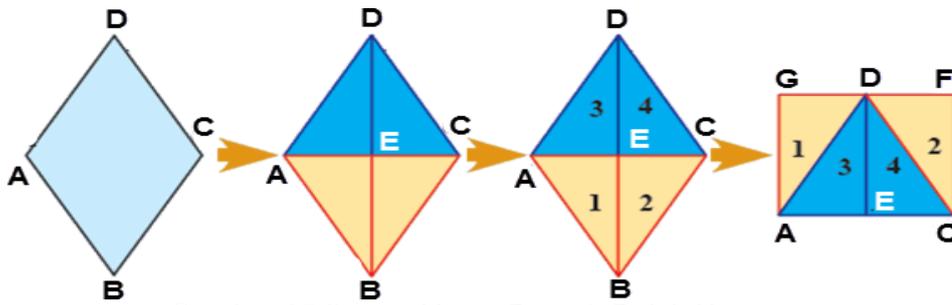
$$Luas\ daerah\ ABCD = Luas\ daerah\ persegi\ panjang\ ACFG$$

$$= p \times l$$

$$= AC \times DE$$

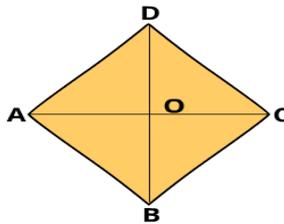
$$= \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

$$Luas\ daerah\ belah\ ketupat = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$



Gambar 95 Ilustrasi Luas Daerah Belah Ketupat Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Selain dengan cara tersebut, kita tahu bahwa belah ketupat dapat dibentuk dari dua buah segitiga yang kongruen, sehingga untuk menemukan luas belah ketupat sebagai berikut.



Gambar 96 Luas Belah Ketupat

Catatan: AC = diagonal 1, BD = diagonal 2

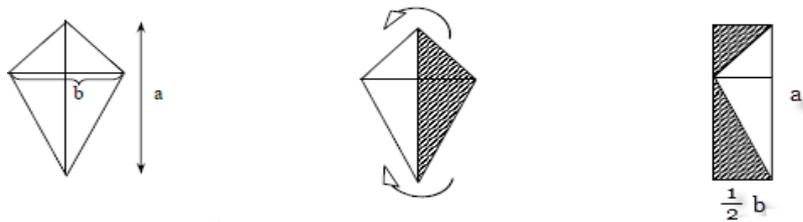
$$\begin{aligned}
 \text{Luas daerah } ABCD &= L_{ABC} + L_{ACD} \\
 &= \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO \\
 &= \frac{1}{2} \times AC \times (BO + DO) \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Luas daerah belah ketupat} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

5) Luas Daerah Layang-layang

Luas daerah layang-layang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi layang-layang tersebut.

Untuk menemukan luas daerah layang-layang perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 97 Ilustrasi Luas Layang-Layang Berdasarkan Luas Segitiga

Langkah yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut: siswa diminta untuk menggambar layang-layang beserta diagonalnya (diagonal 1 = a , dan diagonal 2 = b). Siswa diminta melipat layang-layang tersebut menurut diagonal terpanjang dan mengguntingnya. Setelah digunting tempelkan sehingga membentuk sebuah persegi panjang dengan ukuran panjang sama dengan diagonal terpanjang layang-layang dan lebar sama dengan $\frac{1}{2}$ diagonal terpendek layang-layang. Dapat ditulis:

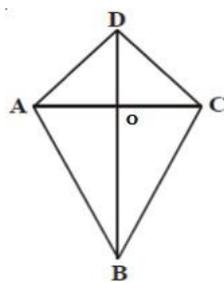
Luas daerah layang-layang = Luas daerah persegi panjang

$$= p \times l$$

$$= a \times \frac{1}{2} b$$

Luas daerah layang-layang = $\frac{1}{2} \times \text{diagonal}_1 \times \text{diagonal}_2$

Layang-layang juga dapat dibentuk dari dua buah segitiga, sehingga menemukan rumus luas daerah layang-layang dapat dilakukan dengan cara:



Gambar 98 Ilustrasi Luas Layang-Layang yang Dibentuk dari dua Segitiga

Catatan: AC = diagonal 1, BD = diagonal 2

Luas daerah ABCD = LABC + LACD

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times (BO + DO)$$

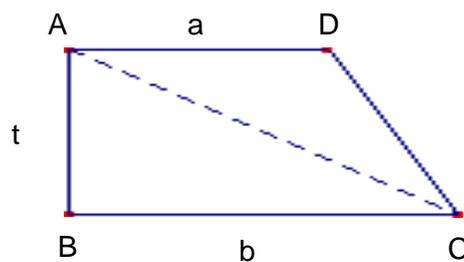
$$= \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

$$\text{Luas daerah layang-layang} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

6) Luas Daerah Trapesium

Luas daerah trapesium adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi trapesium tersebut.

Trapesium dapat dibentuk salah satunya dari dua buah segitiga (perhatikan gambar di bawah ini), sehingga untuk menemukan rumus luas daerah trapesium, kita dapat menarik garis diagonal sehingga membagi daerah trapesium menjadi dua buah segitiga. Trapesium ABCD terbagi menjadi dua bagian yaitu $\triangle ABC$ (dengan alas b dan tinggi t) dan $\triangle ADC$ (dengan alas a dan tinggi t).



Gambar 99 Ilustrasi Luas Trapesium

$$\begin{aligned} \text{Luas daerah } ABCD &= L_{ABC} + L_{ADC} \\ &= \frac{1}{2} \times b \times t + \frac{1}{2} \times a \times t \\ &= \frac{1}{2} \times t \times (a + b) \\ &= \frac{1}{2} \times \text{tinggi} \times \text{jumlah dua panjang sisi sejajar} \end{aligned}$$

$$\text{Luas daerah trapesium} = \frac{1}{2} \times \text{jumlah dua panjang sisi sejajar} \times \text{tinggi}$$

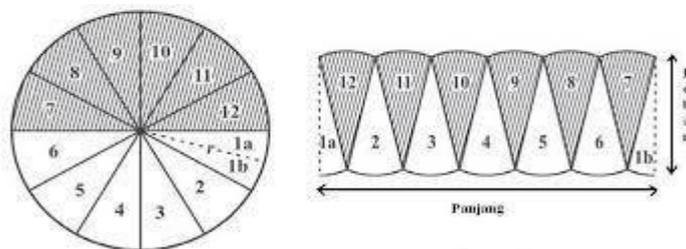
7) Luas Daerah Lingkaran

Luas daerah lingkaran merupakan luas daerah yang dibatasi oleh keliling lingkaran. Menemukan rumus luas daerah lingkaran dapat menggunakan bantuan dari berbagai konsep luas daerah bangun datar yang lain atau dengan menerapkan dalil konektivitas Bruner. Langkah pertama yang dilakukan adalah

membagi lingkaran menjadi beberapa juring lingkaran kemudian menyusunnya menjadi bentuk bangun datar yang lain.

a) Menyusun juring lingkaran menjadi bentuk persegi panjang.

Misalkan, diketahui sebuah lingkaran yang dibagi menjadi 12 buah juring yang sama bentuk dan ukurannya. Kemudian, salah satu juringnya dibagi dua lagi sama besar. Potongan-potongan tersebut disusun sedemikian rupa sehingga membentuk persegi panjang.

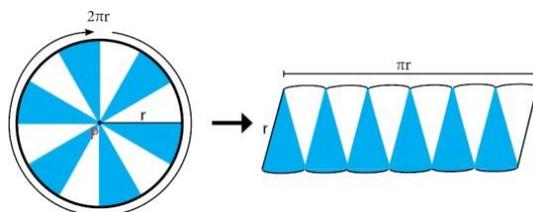


Gambar 100 Ilustrasi Luas Daerah Lingkaran Berdasarkan Luas Persegi Panjang
Susunan potongan-potongan juring tersebut menyerupai persegi panjang dengan ukuran panjang mendekati setengah keliling lingkaran dan lebar sebesar jari-jari, sehingga luas bangun tersebut adalah:

Luas daerah lingkaran = Luas daerah persegi panjang

$$\begin{aligned}
 &= p \times l \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{keliling lingkaran} \times r \\
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2
 \end{aligned}$$

b) Menyusun juring lingkaran menjadi bentuk jajargenjang



Gambar 101 Ilustrasi Luas Lingkaran Berdasarkan Luas Jajargenjang

Luas daerah lingkaran = Luas daerah jajargenjang

$$= a \times t$$

$$= \frac{1}{2} \text{ keliling lingkaran} \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

Selain persegi panjang dan jajargenjang, susunan juring lingkaran dapat dibentuk menjadi segitiga, trapesium, dan belah ketupat. (coba Anda buktikan!)

Jadi, luas daerah lingkaran tersebut dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$\text{Luas daerah lingkaran} = \pi r^2$$

2. Materi 2 Luas Permukaan dan Volume Bangun Ruang

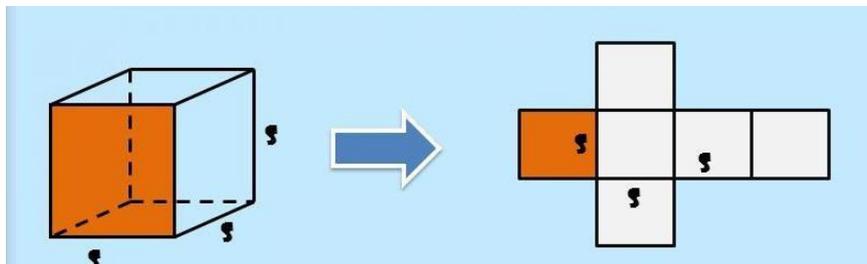
Pada materi 2 ini akan dibahas tentang luas permukaan dan volume bangun ruang.

a. Luas Permukaan

Luas permukaan bangun ruang adalah jumlah luas seluruh permukaan (bidang) pembentuk bangun ruang tersebut. Untuk memudahkan proses mencari rumus luas bangun ruang, maka sebelumnya kita harus memahami jaring-jaring bangun ruang tersebut. Jaring-jaring merupakan rangkaian sisi atau bidang dari sebuah bangun ruang. Pada bagian selanjutnya akan diuraikan luas permukaan dari setiap bangun ruang.

1) Luas Permukaan Kubus

Luas permukaan kubus adalah jumlah luas seluruh permukaan kubus. Seperti kita ketahui, kubus terbentuk dari 6 buah persegi yang kongruen.



Gambar 102 Jaring-Jaring Kubus

Perhatikan gambar jaring-jaring tersebut. *Cobalah Anda temukan jaring-jaring kubus yang lain!*

Misalkan diketahui panjang rusuk kubus adalah s (atau panjang sisi persegi = s).

Luas permukaan kubus = 6 × luas persegi

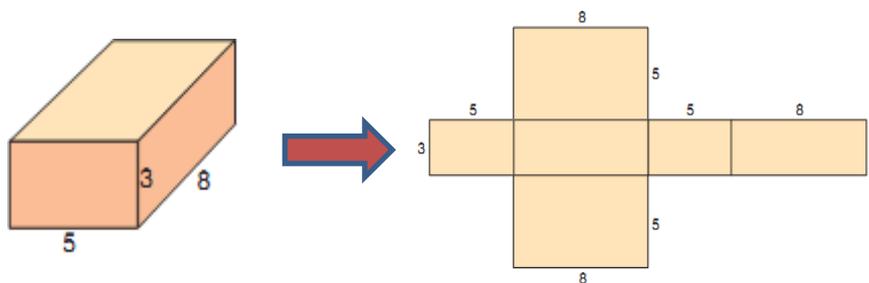
Luas permukaan kubus = 6 × s × s

Luas permukaan kubus = 6 × s²

2) Luas Permukaan Balok

Luas permukaan balok adalah jumlah luas permukaan sisi-sisi balok. Seperti diketahui, bahwa balok terdiri dari 3 pasang sisi berbentuk persegi panjang yang kongruen.

Perhatikan gambar-gambar berikut ini:

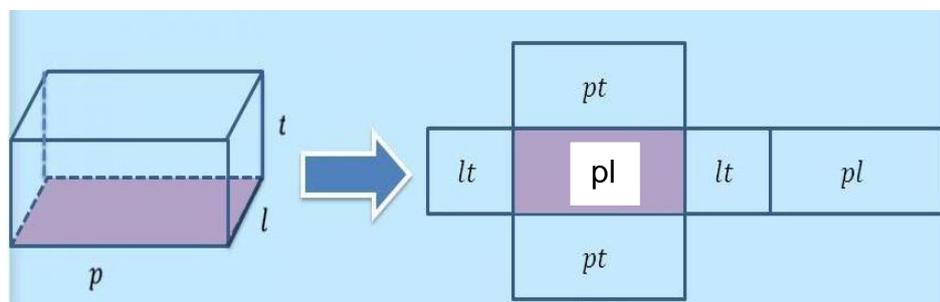


Gambar 103 Jaring-Jaring Balok

Berdasarkan gambar tersebut, luas permukaan balok di atas adalah:

$$2 \times (8 \times 5) + 2 \times (5 \times 3) + 2 (8 \times 3)$$

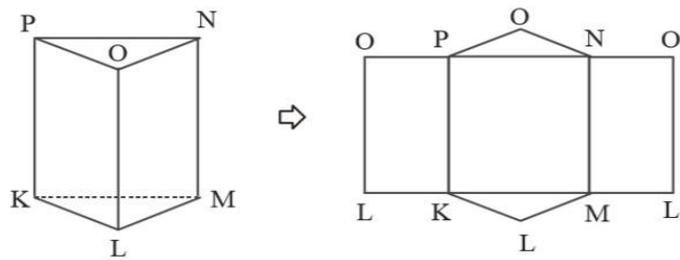
Selanjutnya, perhatikan gambar jaring-jaring berikut ini (cobalah Anda temukan bentuk jaring-jaring balok yang lainnya!)



Gambar 104 Luas Permukaan balok = 2 pl + 2 pt + 2 lt

3) Luas Permukaan Prisma

Luas permukaan prisma adalah jumlah luas permukaan dari prisma. Luas permukaan prisma bergantung pada sisi alasnya. Pada dasarnya, jaring-jaring prisma akan terdiri dari sisi alas dan sisi atas, serta beberapa persegi panjang (bergantung dengan bentuk alasnya). Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 105 Jaring-Jaring Prisma

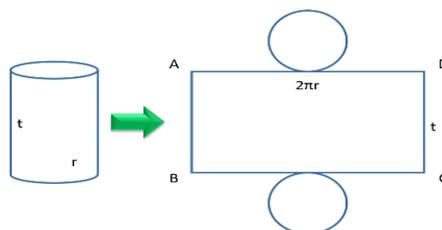
Pada gambar tersebut sisi alas dan sisi atas kongruen, artinya memiliki luas yang sama atau luas daerah alas = luas daerah atas. Sisi selimut prisma berbentuk persegi panjang. Panjang KP = tinggi prisma.

Luas permukaan prisma = luas daerah alas + luas daerah atas + luas daerah selimut

$$\begin{aligned}
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + \text{luas daerah persegi panjang} \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{panjang} \times \text{lebar}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + ((KL + LM + MK) \times KP) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{keliling alas} \times \text{tinggi})
 \end{aligned}$$

4) Luas Permukaan Tabung

Luas permukaan tabung adalah jumlah luas permukaan dari tabung. Jaring-jaring tabung akan terdiri dari dua buah lingkaran dan satu persegi panjang. Perhatikan gambar tabung dan jaring-jaringnya berikut ini!



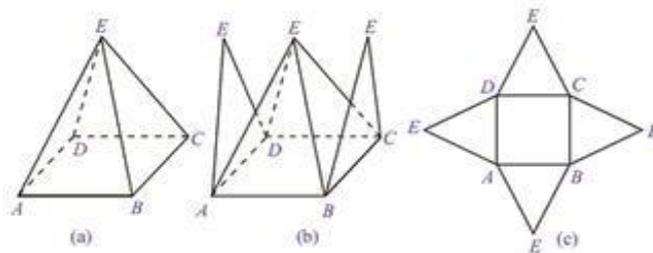
Gambar 106 Jaring-Jaring Tabung

Pada gambar jaring-jaring tersebut, selimut tabung berbentuk persegi panjang, dengan panjangnya sama dengan keliling lingkaran dan lebar sama dengan tinggi tabung.

$$\begin{aligned}
 \text{Luas permukaan tabung} &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{luas selimut tabung}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{luas daerah persegi panjang}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{panjang} \times \text{lebar}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah lingkaran}) + (\text{keliling lingkaran} \times t) \\
 &= 2\pi r^2 + 2\pi r t
 \end{aligned}$$

5) Luas Permukaan Limas

Luas permukaan limas adalah jumlah luas permukaan dari limas. Jaring-jaring limas terdiri dari sisi alas dan beberapa segitiga bergantung dengan bentuk alasnya. Perhatikan gambar limas dan jaring-jaringnya berikut ini.



Gambar 107 Jaring-Jaring Limas

Luas permukaan limas ABCD

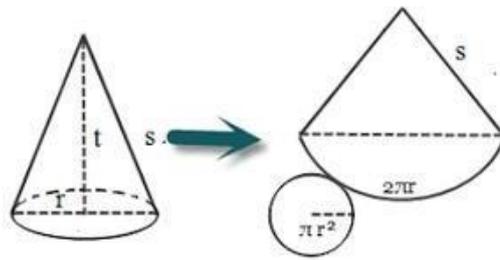
$$\begin{aligned}
 &= \text{Luas daerah ABCD} + (\text{Luas daerah ABE} + \text{Luas daerah BCE} + \text{Luas daerah CDE} + \text{Luas daerah ADE}) \\
 &= \text{Luas daerah alas} + \text{jumlah daerah luas sisi tegak}
 \end{aligned}$$

Jadi Luas Permukaan Limas

$$= \text{Luas Daerah Alas} + \text{Jumlah Daerah Luas Sisi Tegak}$$

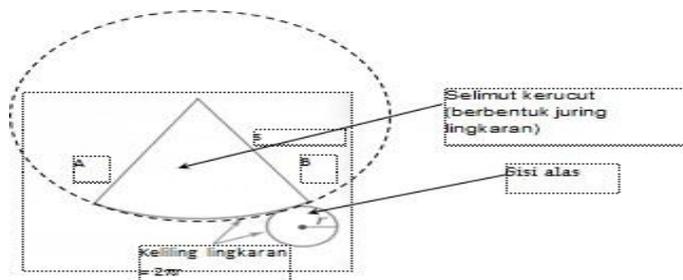
6) Luas Permukaan Kerucut

Luas permukaan kerucut adalah jumlah luas permukaan dari kerucut. Jaring-jaring kerucut terdiri dari satu buah lingkaran dan satu juring lingkaran (dari lingkaran yang berbeda). Perhatikan gambar kerucut dan jaring-jaringnya berikut ini.



Gambar 108 Jaring-Jaring Kerucut

Untuk menentukan luas selimut sebuah kerucut perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 109 Ilustrasi Luas Selimut Kerucut

Perhatikan juring lingkaran sebagai selimut kerucut, diperoleh perbandingan (antara juring dan lingkaran besar) sebagai berikut.

$$\frac{\text{Luas Juring}}{\text{Luas Lingkaran}} = \frac{\text{Panjang Busur}}{\text{Keliling Lingkaran}}$$

$$\frac{\text{Luas Selimut Kerucut}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$\text{Luas Selimut Kerucut} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \times \pi s^2$$

$$\text{Luas Selimut Kerucut} = \pi rs$$

Perhatikan lingkaran besar dengan jari-jari s , maka luas lingkarannya adalah πs^2 dan keliling lingkarannya adalah $2\pi s$. Panjang busur akan sama dengan keliling lingkaran kecil dengan jari-jari r yaitu $2\pi r$.

Luas permukaan kerucut = luas lingkaran + luas selimut

$$= \pi r^2 + \pi rs$$

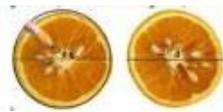
$$= \pi r(r + s)$$

Luas permukaan kerucut = $\pi r(r + s)$

7) Luas Permukaan Bola

Mengajarkan proses menemukan luas permukaan bola pada siswa kita tentunya tidak dapat menggunakan cara seperti sebelumnya. Untuk membantu siswa menemukan rumus luas permukaan bola, maka kita dan siswa dapat mencoba cara sebagai berikut.

- Siapkan benda yang berbentuk bola, misalnya bola plastik atau jeruk, dalam contoh ini akan menggunakan jeruk.
- Potong jeruk menjadi 2 bagian yang sama besar.
- Gambar lingkaran yang diameternya sama dengan diameter belahan jeruk (boleh menjiplaknya). Siswa kita minta untuk menggambar lebih dari 1 lingkaran.



- Kupas kulit jeruk dari belahan jeruk yang berbentuk setengah bola dan potonglah kecil-kecil.



- Tempelkan semua potongan kulit jeruk pada lingkaran yang telah digambar oleh siswa (diameter lingkaran sama dengan diameter belahan jeruk)



- Dari percobaan tersebut, potongan kulit jeruk akan memenuhi 4 lingkaran.
- Diperoleh, luas permukaan bola = 4 x luas daerah lingkaran

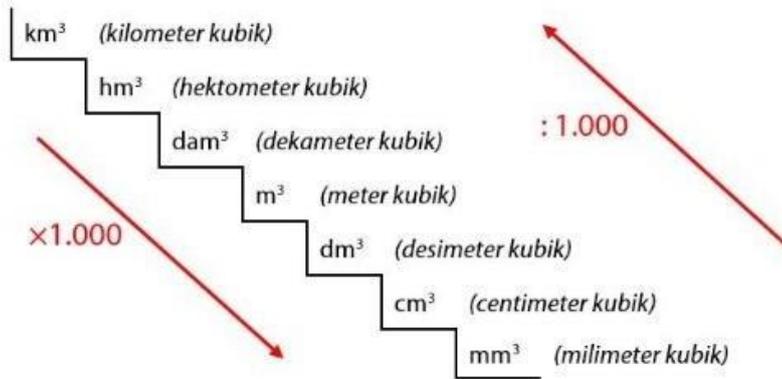
$$= 4\pi r^2$$

b. Pengukuran volume

Sebelum membahas mengenai volume bangun ruang, maka kita akan mengingat kembali tentang pengukuran volume.

Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur volume adalah km^3 , hm^3 , dam^3 , m^3 , dm^3 , cm^3 , mm^3 .

Perhatikan bagan di bawah ini.



Gambar 110 Bagan Konversi Satuan Volume

Mengkonversi satuan volume dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran volume maka dikalikan 1.000, dan setiap naik 1 satuan ukuran volume maka dibagi 1.000.

Selain satuan baku yang telah disebutkan, satuan baku lain untuk mengukur volume antara lain liter. 1 liter merupakan sebuah ukuran isi dari kubus yang memiliki panjang rusuk 1 *desimeter* atau $1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$.

Coba Anda buat tangga konversi satuan volume (liter), dan carilah hubungan antara milliliter dan cm^3 !

Setelah menguasai pengukuran volume, siswa juga diharapkan dapat menguasai hukum kekekalan volume. Siswa yang sudah menguasai hukum kekekalan volume akan memahami bahwa jika air pada sebuah gelas terisi penuh dan dimasukkan sebuah benda, maka volume air yang tumpah sama dengan volume benda yang dimasukkan ke dalam gelas.

c. Volume Bangun Ruang

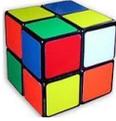
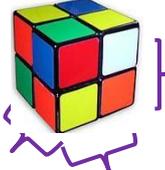
Hakikat volume adalah isi yang memenuhi sebuah bangun ruang berongga.

1) Volume Kubus

Volume Kubus adalah isi yang memenuhi bangun ruang kubus. Untuk membantu siswa menemukan rumus volume kubus, kita dapat menggunakan langkah seperti berikut ini:

- Siapkan benda yang berbentuk kubus atau boleh kita menggunakan rubik.
- Siapkan kubus satuan dengan ukuran satu satuan volume.
- Ukur panjang rusuk kubus.
- Isi benda yang berbentuk kubus dengan kubus satuan tersebut.
- Hitung banyak kubus satuan yang mengisi benda berbentuk kubus secara penuh.
- Cari hubungan antara panjang rusuk kubus dengan banyak kubus satuan yang mengisi kubus tersebut.

Tabel 8 Volume Bangun Kubus

Bentuk Bangun	Panjang rusuk	Banyak kubus satuan	Hubungan (panjang rusuk dan banyakkotak)
	2	8	$2 \times 2 \times 2 = 8$
	3	27	$3 \times 3 \times 3 = 27$
	4	64	$4 \times 4 \times 4 = 64$
	S		$s \times s \times s$

Dapat disimpulkan *volume kubus* = $s \times s \times s$, dimana s = panjang rusuk kubus.

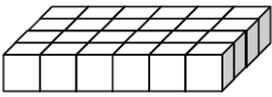
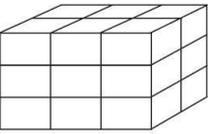
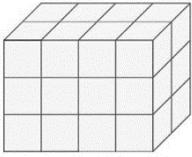
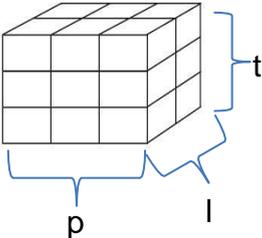
2) Volume Balok

Volume balok adalah isi yang memenuhi bangun ruang balok. Untuk memudahkan dalam membantu siswa menemukan volume balok, kita dapat menggunakan langkah sebagai berikut.

- Siapkan benda-benda berbentuk balok dan beberapa kubus satuan.
- Ukur panjang sisi (panjang, lebar, dan tinggi) balok.

- c) Isi benda yang berbentuk balok dengan menggunakan kubus satuan.
- d) Hitung banyak kubus satuan yang mengisi balok tersebut sampai penuh.
- e) Cari hubungan antara panjang, lebar, dan tinggi balok dengan banyak kubus satuan yang mengisi balok tersebut

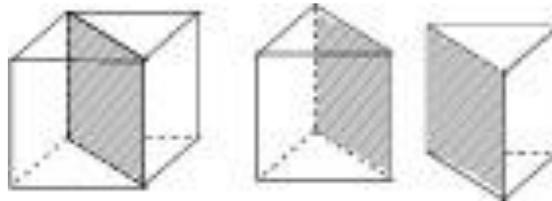
Tabel 9 Volume Balok

Bentuk Bangun	Panjang (p)	Lebar (l)	Tinggi (t)	Banyak kubus satuan	Hubungan p, l, t, dan kubus satuan
	6	4	1	24	$6 \times 4 \times 1 = 24$
	3	2	3	18	$3 \times 2 \times 3 = 18$
	4	2	3	24	$4 \times 2 \times 3 = 24$
	p	l	t		$P \times l \times t$

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan volume balok adalah: *Volume balok* = *panjang* × *lebar* × *tinggi*.

3) Volume Prisma

Volume prisma adalah isi yang memenuhi bangun ruang prisma tersebut. Untuk menentukan volume prisma, perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 111 Ilustrasi Volume Prisma

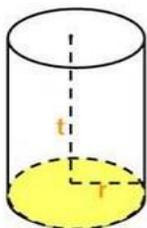
Perhatikan volume prisma tegak segitiga tersebut. Prisma segitiga tersebut diperoleh dari membelah sebuah balok dan membaginya pada salah satu bidang diagonalnya, sehingga:

$$\begin{aligned}\text{Volume prisma tegak segitiga} &= \frac{1}{2} \text{ volume balok} \\ &= \frac{1}{2} (pl)t \\ &= \left(\frac{1}{2} pl\right)t \\ &= \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi}\end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan: **Volume prisma = Luas daerah alas × tinggi.**

4) Volume Tabung

Volume tabung adalah isi yang memenuhi bangun ruang tabung tersebut. Setelah kita menemukan volume prisma, maka kita akan dapat menentukan rumus volume tabung.



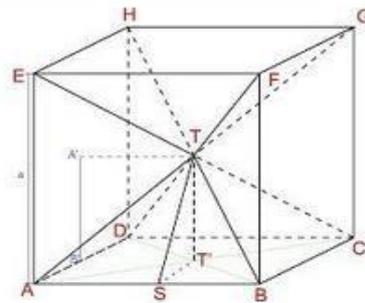
Karena Volume prisma = luas daerah alas × tinggi, dimana alas tabung berbentuk lingkaran, maka:

$$\begin{aligned}\text{Volume prisma} &= \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi} \\ &= \pi r^2 t\end{aligned}$$

Jadi, volume tabung = $\pi r^2 t$

5) Volume Limas

Volume limas adalah isi yang memenuhi bangun ruang limas tersebut. Untuk menemukan rumus volume limas, perhatikan gambar prisma berikut ini!



Gambar 112 Limas

Jika dicermati pada prisma ABCD.EFGH (semua sisi prisma kongruen) tersebut terdapat 6 limas segiempat yang kongruen (limas T.ABCD, T.EFGH, T.BCGF, T.ADHE, T.DCGH, T.ABFE,) dengan alas limas kongruen dengan alas prisma dan tinggi limas = 1 tinggi prisma atau tinggi 2 prisma = 2 tinggi limas. Jadi:

$$\text{Volume prisma} = 6 \times \text{volume limas}$$

$$\text{Volume limas} = \frac{1}{6} \times \text{volume prisma}$$

$$= \frac{1}{6} \times \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi prisma}$$

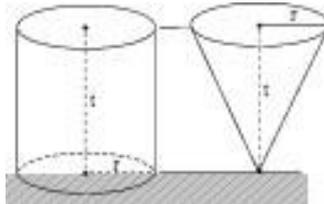
$$= \frac{1}{6} \times \text{luas daerah alas} \times 2 \times \text{tinggi limas}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi}$$

$$\text{Jadi, volume limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi}$$

6) Volume Kerucut

Volume kerucut adalah isi yang memenuhi bangun ruang kerucut tersebut. Perhatikan gambar tabung dan kerucut berikut ini.



Gambar 113 Ilustrasi Volume Kerucut Berdasarkan Volume Tabung

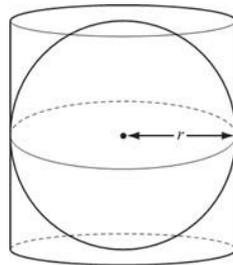
Untuk menentukan volume kerucut, siswa dapat melakukan praktik melalui kegiatan berikut ini.

Siapkan sebuah tabung dan kerucut yang memiliki alas dan tinggi yang sama. Siswa diminta untuk menakar air, beras, ataupun pasir. Berdasarkan hal tersebut diperoleh hasil bahwa untuk memenuhi volume tabung tersebut dibutuhkan 3 kali volume kerucut yang memiliki alas dan tinggi yang sama. Siswa dapat menyimpulkan:

$$\begin{aligned} \text{Volume kerucut} &= \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 t \end{aligned}$$

7) Volume Bola

Volume bola adalah isi yang memenuhi bangun ruang bola tersebut. Untuk membantu siswa menemukan rumus volume bola, kita dapat mengaitkannya dengan volume tabung. Perhatikan gambar berikut ini, pada gambar tersebut, terdapat bola yang berjari-jari r , serta tabung yang berjari-jari r dan tinggi tabung $= 2r$. Jika kita melakukan percobaan sederhana, percobaan menakar benda atau air, maka hasil menakar akan menunjukkan bahwa volume tabung sama dengan 3 kali volume setengah bola.



Gambar 114 Ilustrasi Volume Bola Berdasarkan Volume Tabung

$\text{Volume tabung} = 3 \times \text{volume setengah bola}$

$\text{Volume setengah bola} = \frac{1}{3} \times \text{volume tabung}$

$\text{Volume bola} = \frac{2}{3} \times \text{volume tabung}$

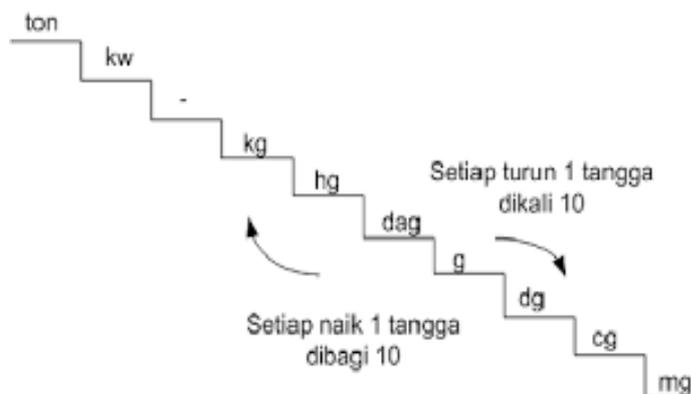
$$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 t$$

$$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 2r$$

$$= \frac{4}{3} \times \pi r^3$$

d. Pengukuran Berat

Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur berat adalah *kg, hg, dag, gram, dg, cg, mg*. Perhatikan bagan di bawah ini.



Gambar 115 Bagan Konversi Satuan Berat

Berdasarkan bagan tersebut, terdapat satuan baku yang lain untuk mengukur berat, yaitu: $1 \text{ ton} = 10 \text{ kw}$, $1 \text{ ton} = 1000 \text{ kg}$, dan $1 \text{ kw} = 100 \text{ kg}$. Selain itu terdapat ukuran baku yang lain yaitu 1 ons , dimana $1 \text{ ons} = 1 \text{ hg}$.

Setelah menguasai pengukuran berat, siswa diharapkan dapat memahami hukum kekekalan berat. Siswa yang telah memahami hukum kekekalan berat akan menyatakan bahwa berat suatu benda akan tetap meskipun bentuknya berubah, dan ditimbang dengan alat yang berbeda.

3. Materi 3 Debit

Pada materi 3 terkait debit akan dibahas tentang pengukuran waktu dan debit.

a. Pengukuran waktu

Sebelum membahas tentang debit, maka akan dimulai terlebih dahulu mempelajari pengukuran waktu. Satuan baku untuk mengukur waktu adalah detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, semester, tahun, lustrum, windu, dasawarsa, dan abad.

Coba Anda cari hubungan antar satuan waktu tersebut!

b. Debit

Permasalahan dalam kajian volume tidak hanya sekedar menghitung berapa volume dari sebuah bangun ruang tetapi berhubungan juga dengan debit. Debit digunakan untuk mengukur volume zat cair yang mengalir untuk setiap satuan waktu. Satuan yang biasa digunakan adalah volume persatuan waktu (m^3/detik , m^3/jam , liter/menit, liter/detik ataupun liter/jam). Konsep debit di Sekolah Dasar, dapat dimulai dengan memberikan ilustrasi, seorang siswa akan mengisi air minum pada botol minuman yang berkapasitas 1 liter, waktu yang dibutuhkan untuk mengisi air minum dari gallon air mineral ke botol minuman adalah 1,5 menit, siswa berdiskusi dengan guru sampai mendapatkan kesimpulan bahwa ukuran mengisi air atau volume air tiap satu satuan waktu dinamakan debit.

$$\text{Debit} = \frac{\text{Volume}}{\text{Waktu}}$$

Contoh

- 1) Sebuah drum dengan jari-jari 60 cm dan tinggi 1 m ingin diisi dengan air hingga penuh. Jika waktu yang dibutuhkan untuk mengisi drum tersebut adalah 50 menit, berapakah debit airnya?

Sebelum menentukan debit, tentukanlah dahulu volume drum.

$$\begin{aligned}\text{Volume drum} &= \pi r^2 t \\ &= 3,14 \times ((0,6)^2 \text{ m}^2) \times (1) \text{ m} \\ &= 1,884 \text{ m}^3 \\ &= 1884 \text{ dm}^3 = 1884 \text{ liter}\end{aligned}$$

- 2) Sebuah kolam renang memiliki kedalaman di tempat yang dangkal adalah 1 m dan kedalaman kolam di tempat yang paling dalam adalah 2,5 m. Jarak antara dinding kolam bagian dangkal dan dalam adalah 10 m, dan jarak antara dinding yang kongruen adalah 3 m. Pada pukul 07.25 kolam tersebut diisi air menggunakan pompa dengan debit 125 liter/menit, dan pada pukul 09.00 pompa tersebut sempat mati selama 45 menit. Pada pukul berapa kolam renang tersebut penuh terisi air?

Berdasarkan permasalahan tersebut, kolam renang tersebut berbentuk prisma dengan alas trapesium (**Mengapa? Coba gambarkan!**)

$$\begin{aligned}\text{Volume prisma} &= \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= \left(\frac{(1+2,5)}{2} \times 10 \right) \text{ m}^2 \times (3) \text{ m} = 52,5 \text{ m}^3 \\ &= 52.500 \text{ dm}^3 = 52.500 \text{ liter}\end{aligned}$$

$$\text{Waktu} = \frac{\text{Volume}}{\text{Debit}}$$

$$\text{Waktu} = \frac{52.500}{125}$$

$$\text{Waktu} = 420 \text{ menit}$$

Mulai diisi pukul 07.25 dan pada pukul 09.00 terhenti selama 45 menit jadi akan penuh pada pukul 15.05 (**Mengapa?**)

4. Materi 4 Jarak, Waktu, dan Kecepatan

Konsep kecepatan tentu sangat berhubungan dengan kegiatan sehari-hari. Seperti telah diketahui, kecepatan juga berkaitan dengan jarak dan waktu tempuh. Tentu kita masih ingat akan rumus kecepatan.

$$\text{Kecepatan} = \frac{\text{Jarak}}{\text{waktu}}$$

$$\text{Jarak} = \text{Waktu} \times \text{Kecepatan}$$

$$\text{Waktu} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Kecepatan}}$$

Pada bagian ini akan dipaparkan mengenai waktu berpapasan dan waktu menyusul. Saat dua orang melakukan sebuah perjalanan dari arah yang berlawanan, dan melalui jarak yang sama (dengan asumsi kecepatannya adalah konstan), maka di suatu titik tertentu mereka akan berpapasan. Sama halnya ketika ada dua orang berkendara dengan arah yang sama dan melalui jalur yang sama, maka orang yang satu akan menyusul orang yang terlebih dahulu berangkat dengan kecepatan yang berbeda.

Perhatikan contoh–contoh berikut ini.

- a. Jarak Kota A dan Kota B adalah 275 km. Ahmad berkendara dari Kota A ke Kota B pada pukul 09.30 dengan kecepatan rata-rata 54 km/jam. Boni berkendara dari Kota B ke Kota A dengan kecepatan 56 km/jam. Jika mereka melalui jalan yang sama dan lancar, pada pukul berapakah mereka akan berpapasan?

Pada kasus ini terdapat dua orang yang berkendara berbeda arah tetapi melalui jalan yang sama dan berangkat pada waktu yang sama.

Untuk menentukan waktu mereka berpapasan dapat digunakan rumus:

Waktu Berpapasan
Ketika Jam Berangkat Sama

$$W_p = \frac{\text{Jarak Total}}{K_1 + K_2}$$

Silahkan dicoba dengan rumus tersebut, dan hasil yang akan diperoleh adalah 2 jam 30 menit atau mereka akan berpapasan pada pukul 09.30 + 2 jam 30 menit sama dengan pukul 12.00

- b. Jarak Kota A dan Kota B adalah 180 km. Ahmad berkendara dari kota A ke kota B pada pukul 09.30 dengan kecepatan 80 km/jam. Boni berkendara dari kota B ke kota A pada pukul 10.00 dengan kecepatan 60 km/jam. Jika mereka melalui jalan yang sama dan lancar, pada pukul berapakah mereka akan berpapasan?

Untuk kasus yang kedua, berbeda dengan kasus sebelumnya. Perbedaannya terletak pada waktu keberangkatannya, sehingga akan ada selisih waktu. Selisih waktu berangkatnya adalah 30 menit atau $\frac{1}{2}$ jam.

Kemudian kita akan menentukan saat orang kedua berangkat (dalam hal ini Boni), orang pertama (dalam hal ini Ahmad) telah menempuh jarak berapa km (atau yang kemudian disebut dengan selisih jarak).

$$\begin{aligned} \text{Selisih jarak} &= \text{kecepatan} \times \text{selisih waktu} \\ &= 80 \frac{\text{km}}{\text{jam}} \times \frac{1}{2} \text{ jam} \\ &= 40 \text{ km} \end{aligned}$$

Waktu Berpapasan
Ketika Jam Berangkat Berbeda

$$w_p = \frac{\text{Jarak Total} - \text{Selisih Jarak}}{K_1 + K_2}$$

Waktu berpapasan adalah:

$$\begin{aligned} \text{Waktu berpapasan} &= \frac{(180 - 40) \text{ km}}{(80 + 60) \frac{\text{km}}{\text{jam}}} \\ &= \frac{140 \text{ km}}{140 \frac{\text{km}}{\text{jam}}} \\ &= 1 \text{ jam} \end{aligned}$$

Jadi mereka berpapasan pada pukul 11.00.

- c. Fitria dan Iqbal akan pergi berkendara. Fitria pergi pukul 09.40 dengan kecepatan 60 km/jam. Kemudian Iqbal akan pergi pukul 10.00 dengan kecepatan 70 km/jam. Pada pukul berapakah Iqbal akan menyusul Fitria?

Pada kasus ini, ada 2 orang yang berkendara dengan tujuan yang sama, arah yang sama, dan jalan yang dilalui pun sama. Orang pertama berangkat terlebih dahulu, kemudian disusul orang kedua dengan kecepatan yang lebih cepat, maka dapat diasumsikan bahwa orang kedua akan menyusul orang pertama.

Untuk menentukan kapan orang kedua akan menyusul orang pertama (atau dalam kasus ini Iqbal akan menyusul Fitria) maka yang akan ditentukan terlebih dahulu adalah jarak saat Iqbal berangkat maka Fitria sudah mencapai jarak berapa km (atau dalam hal ini akan kita sebut sebagai selisih jarak).

Dari permasalahan tersebut diketahui selisih waktunya adalah 20 menit atau $\frac{1}{2}$ jam.

Selisih jarak = kecepatan \times selisih waktu

$$= 60 \frac{\text{km}}{\text{jam}} \times \frac{1}{2} \text{ jam}$$

$$= 20 \text{ km.}$$

Waktu Menyusul

$$W_m = \frac{\text{Selisih Jarak}}{K_2 - K_1}$$

Dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Waktu menyusul} &= \frac{\text{selisih jarak}}{\text{kecepatan 1} - \text{kecepatan 2}} \\ &= \frac{20 \text{ km}}{70 \frac{\text{km}}{\text{jam}} - 60 \frac{\text{km}}{\text{jam}}} \\ &= \frac{20 \text{ km}}{10 \frac{\text{km}}{\text{jam}}} \\ &= 2 \text{ jam} \end{aligned}$$

Karena Iqbal berangkat pukul 10.00, maka Iqbal akan menyusul Fitria pada pukul 10.00 + 2 jam atau pukul 12.00.

Rangkuman

1. Keliling dan Luas Daerah Bangun Datar

- a. Pengukuran panjang dapat diukur dengan satuan non baku dan satuan baku. Contoh satuan tidak baku untuk pengukuran panjang antara lain jengkal, hasta, depa dan kaki. Contoh satuan baku untuk mengukur panjang adalah kilometer (km), hektometer (hm), dekameter (dam), meter (m), desimeter (dm), centimeter (cm), dan millimeter (mm).
- b. Keliling adalah jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun.
- c. Luas bangun datar adalah luas daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi bangun datar tersebut. Contoh satuan baku untuk mengukur luas adalah km^2 , hm^2 , dam^2 , m^2 , dm^2 , cm^2 , mm^2 , *are* dan *hektar*.

2. Luas Permukaan Bangun Ruang dan Volume Bangun Ruang

- a. Luas permukaan adalah jumlah seluruh sisi-sisi yang membatasi bangun ruang tersebut.
- b. Volume adalah isi yang memenuhi bangun ruang berongga. Contoh satuan baku untuk mengukur volume adalah km^3 , hm^3 , dam^3 , m^3 , dm^3 , cm^3 , mm^3 dan *kl*, *hl*, *dal*, *liter*, *dl*, *cl*, *ml*.
- c. Contoh satuan baku untuk mengukur berat adalah *ton*, *kw*, *kg*, *hg(ons)*, *dag*, *gram*, *dg*, *cg*, *mg*.

3. Debit

Debit merupakan ukuran untuk mengukur volume zat cair yang mengalir untuk setiap satuan waktu. Satuan waktu yang dapat digunakan adalah detik, menit, dan jam. Satuan debit yang dapat digunakan antara lain *ml/detik*, *ml/menit*, *l/detik*, *l/menit*, dan lain sebagainya.

4. Jarak, waktu, dan kecepatan

Kecepatan merupakan jarak yang ditempuh persatu satuan waktu. Satuan yang dapat digunakan antara lain *km/jam*, *meter /menit*, *menit/ detik*, dan lain sebagainya.

Pembelajaran 5. Statistika dan Peluang

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi statistika (penyajian data, ukuran pemusatan data, ukuran penyebaran data, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang).
2. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait penyajian data, ukuran pemusatan, ukuran penyebaran, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menganalisis data statistik secara deskriptif.
2. Menganalisis penyajian data dalam bentuk tabel, diagram ataupun grafik.
3. Menganalisis ukuran pemusatan (mean, median, dan modus) dari data statistik.
4. Menganalisis ukuran penyebaran (range, kuartil, simpangan baku dan variansi) dari data statistik.
5. Menganalisis nilai baku dari data statistik.
6. Memecahkan masalah sehari-hari berkaitan dengan teknik membilang, permutasi, kombinasi, dan peluang.

C. Uraian Materi

Pada uraian materi ini akan dibahas tentang statistik, statistika, data, penyajian data, distribusi frekuensi, distribusi frekuensi relatif, dan ukuran penyebaran data serta nilai baku dan peluang

1. Materi 1 Statistik, Statistika, dan Data

Pada materi 1 ini, akan dibahas tentang statistik, statistika, dan data.

a. Pengertian Statistik dan Statistika

Statistik adalah kesimpulan fakta berbentuk bilangan yang disusun dalam bentuk daftar atau tabel yang menggambarkan suatu kejadian. Data yang diperoleh dari hasil pengamatan disusun dan disajikan dalam bentuk bilangan-bilangan pada sebuah daftar atau tabel, inilah yang dinamakan dengan statistik. Statistik juga melambangkan ukuran dari sekumpulan data dan wakil dari data tersebut. Contohnya dalam kehidupan sehari-hari sering kita dengar kasus seperti: Di jalan tol setiap bulan terjadi 25 kali kecelakaan mobil; uang saku murid SD sekitar Rp10.000 rupiah; ada 5% dari jumlah lulusan Sekolah Dasar di Indonesia tidak melanjutkan lagi ke jenjang berikutnya dan sebagainya.

Sekumpulan data yang digunakan untuk menjelaskan masalah dan menarik kesimpulan yang benar tentunya harus melalui beberapa proses, yaitu meliputi proses pengumpulan data, pengolahan data, dan penarikan kesimpulan. Untuk itu kita memerlukan pengetahuan tersendiri yang disebut dengan statistika. Statistika adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan data, penganalisisan data, dan penarikan kesimpulan berdasarkan data yang ada. Statistika juga dapat diartikan sebagai metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, perhitungan, penggambaran dan penganalisisan data, serta penarikan kesimpulan berdasarkan penganalisisan yang dilakukan.

b. Data

Data merupakan sejumlah informasi yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah, baik yang berupa bilangan maupun yang

berbentuk kategori, misalnya: baik, buruk, tinggi, rendah dan sebagainya. Data dikatakan baik apabila memenuhi beberapa persyaratan sebagai berikut.

- 1) Objektif, artinya data yang dikumpulkan harus dapat menggambarkan keadaan yang sebenarnya.
- 2) Relevan, artinya data yang dikumpulkan mempunyai kaitan dengan permasalahan yang akan diteliti.
- 3) Sesuai zaman (up to date), artinya data tidak boleh ketinggalan zaman (usang), dengan berkembangnya waktu dan teknologi maka menyebabkan suatu kejadian dapat mengalami perubahan dengan cepat.
- 4) Representatif, artinya data yang dikumpulkan melalui teknik sampling
- 5) Harus dapat mewakili dan menggambarkan keadaan populasinya.
- 6) Dapat dipercaya, artinya data yang dikumpulkan diperoleh dari sumber data yang tepat.

c. Macam-Macam Data

Macam-macam data diantaranya membahas tentang sifat data, menurut cara memperoleh data, dan menurut sumber data.

1) Menurut Sifat Data

Menurut sifatnya, data dibagi menjadi data kualitatif dan data kuantitatif. Data kualitatif adalah data yang tidak berbentuk bilangan, tetapi berbentuk kategori atau atribut. Contoh data kuantitatif antara lain banyak siswa SD di Kecamatan Sukawangi ada 1745 orang, tinggi rerata siswa SD Kelas II adalah 120 cm dan sebagainya. Contoh data kualitatif antara lain baik, buruk, tinggi, rendah, besar, kecil, cukup, dan sebagainya. Data kuantitatif adalah data yang berbentuk bilangan.

Data kuantitatif dibagi menjadi dua bagian yaitu data diskrit dan data kontinu. Data diskrit adalah data yang diperoleh dengan cara menghitung atau membilang. Contoh data diskrit adalah banyak siswa kelas III SD Sukawangi ada 35 siswa. Data kontinu adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur. Contoh data kontinu adalah tinggi badan Andi adalah 145 cm.

2) Menurut Cara Memperoleh Data

Menurut cara memperoleh data, data dibagi menjadi data primer dan data sekunder. Data primer adalah data yang dikumpulkan langsung pada sumber datanya. Contoh data primer adalah seorang guru ingin mengetahui kemampuan pemahaman siswa, untuk itu guru memberikan tes pemahaman langsung kepada siswa. Data sekunder adalah data yang dikumpulkan tidak langsung dari sumber datanya tetapi melalui pihak lain. Contoh data sekunder misalnya data peringkat literasi siswa yang telah dirangkum oleh INAP (Indonesia National Assessment Program).

3) Menurut Sumber Data

Menurut sumber data, data dibagi menjadi data internal dan data eksternal. Data internal adalah data yang menggambarkan keadaan dalam suatu organisasi itu sendiri. Contoh data internal suatu sekolah adalah data kepala sekolah, data guru, data siswa dan sebagainya. Data eksternal adalah data yang menggambarkan keadaan di luar organisasi itu. Contoh data eksternal adalah data yang menggambarkan faktor- faktor yang mempengaruhi suatu sekolah, seperti data mengenai pendapatan orang tua siswa, data pekerjaan orang tua siswa, dan lain- lain.

2. Materi 2 Penyajian Data

Mengajarkan penyajian data untuk siswa dapat kita mulai dari hal- hal yang sederhana dan dekat dengan siswa. Siswa dapat kita minta untuk mendata banyak siswa laki-laki dan perempuan di suatu kelas tertentu. Selain itu kita dapat meminta siswa untuk mendata banyak buku yang dibawa oleh setiap siswa, mendata tinggi badan siswa, berat badan siswa, dan lain-lain. Lebih jelasnya dapat dilihat pada uraian di bawah ini.

a. Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

Berikut ini diberikan beberapa contoh dan cara menyajikan data dalam bentuk tabel daftar statistik. Macam-macam tabel daftar statistik yang telah dikenal diantaranya adalah sebagai berikut.

1) Tabel Daftar Baris Kolom

Tabel daftar baris kolom merupakan penyajian data dalam bentuk tabel dengan susunan baris dan kolom yang saling berhubungan. Misalkan kita meminta siswa untuk menanyakan dan mendata banyak siswa laki-laki dan perempuan kelas I, II, III, IV, V, dan VI SD Cicarita pada wali kelas masing-masing. Data yang siswa peroleh dapat disajikan dalam tabel daftar baris dan kolom. Berikut adalah contoh tabel daftar baris kolom.

Tabel 10 Banyak Siswa Kelas IV SD Cicarita Tahun Ajaran 2018/2019

Kelas	Semester Ganjil		Semester Genap	
	Laki-Laki	Perempuan	Laki-Laki	Perempuan
I	21	19	21	21
II	18	17	20	17
III	23	21	22	21
IV	16	20	17	20
V	18	18	19	20
VI	19	21	19	21
JUMLAH	115	116	118	120

Catatan : data fiktif

2) Tabel Daftar Kontingensi

Tabel kontingensi merupakan tabel yang dapat digunakan untuk mengukur hubungan (asosiasi) antara dua variabel kategorik. Tabel kontingensi merangkum frekuensi pada setiap kategori variabel. Data yang terdiri atas dua variabel dimana setiap variabel terdiri atas m kategori dan variabel yang lain terdiri dari n kategori. Dapat dibuat daftar kontingensi berukuran $m \times n$ dimana m menyatakan baris dan n menyatakan kolom. Untuk membuat tabel daftar kontingensi, kita meminta siswa secara berkelompok untuk mendata banyak siswa yang bersekolah pada jenjang SD, SMP, dan SMA di wilayah RTnya masing-masing. Misalkan data yang didapat oleh siswa dirangkum pada tabel daftar kontingensi sebagai berikut.

Tabel 11 Jumlah Siswa di Wilayah RT 03 RW 14 Kelurahan Sukamandi menurut Jenjang Sekolah dan Jenis Kelamin Tahun Ajaran 2019/2020

Jenis Kelamin	Tingkat Sekolah			Jumlah
	SD	SMP	SMA	
Laki-Laki	6	8	9	23
Perempuan	11	6	8	25
Jumlah	17	14	17	48

Catatan : data fiktif

3) Tabel Daftar Distribusi Frekuensi

Data kuantitatif dapat dibuat menjadi beberapa kelompok atau kelas dan disajikan dalam bentuk tabel. Pembelajaran yang dapat dilakukan di kelas untuk mengenalkan penyajian data menggunakan tabel distribusi frekuensi kepada siswa, kita dapat mengajak siswa untuk mendata nilai matematika siswa kelas IV.

Misalkan diperoleh data sebagai berikut:

90, 100, 85, 95, 75, 85, 80, 95, 70, 85, 75, 95, 90, 100, 90, 85, 75, 100, 80, 95, 100, 95, 75, 95, 85, 90, 70, 85, 75, 95, 85, 90, 75, 100, 95.

Tabel distribusi frekuensi dari data tersebut adalah:

Tabel 12 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

NILAI	FREKUENSI
70	2
75	6
80	2
85	7
90	5
95	8
100	5
Jumlah	35

Catatan: data fiktif

b. Penyajian Data Dalam Bentuk Diagram

Tujuan dari menyajikan data statistik dalam bentuk diagram adalah untuk memudahkan dalam memberikan informasi secara visual. Terdapat bermacam-macam bentuk diagram, yaitu diagram lambang, diagram batang, dan diagram lingkaran.

1) Diagram Lambang

Diagram lambang digunakan untuk menyajikan data statistik dalam bentuk gambar-gambar dengan ukuran tertentu yang menunjukkan jumlah masing-masing data. Misalkan kita meminta siswa untuk mendata banyak buku yang terdapat di perpustakaan sekolah, data yang diperoleh siswa dirangkum pada tabel 13 berikut.

Tabel 13 Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame

Jenis buku	Jumlah
Kamus Cerita	30
Fabel	40
Pengetahuan	70
Dongeng	50
Agama	60
Jumlah	250

Data dari tabel tersebut dapat kita ubah dalam diagram lambang menjadi seperti berikut ini.

Tahun	Banyak Mobil
Agama	
Cerita Fabel	
Pengetahuan	
Kamus Dongeng	
Agama	

Keterangan :  : mewakili 10 buku

Diagram 1 Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame

2) Diagram Batang

Diagram batang dapat digunakan untuk membandingkan banyak suatu data dengan data yang lain. Misalkan guru dan siswa mendata banyak siswa yang ada di SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun 2019/2020, data yang diperoleh guru dan siswa dirangkum pada Tabel 14.

Tabel 14 Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Kelas	Jumlah Siswa
I	31
II	32
III	33
IV	31
V	32
Jumlah	159

Dari Tabel 14 selanjutnya akan disusun dalam diagram batang seperti berikut ini.

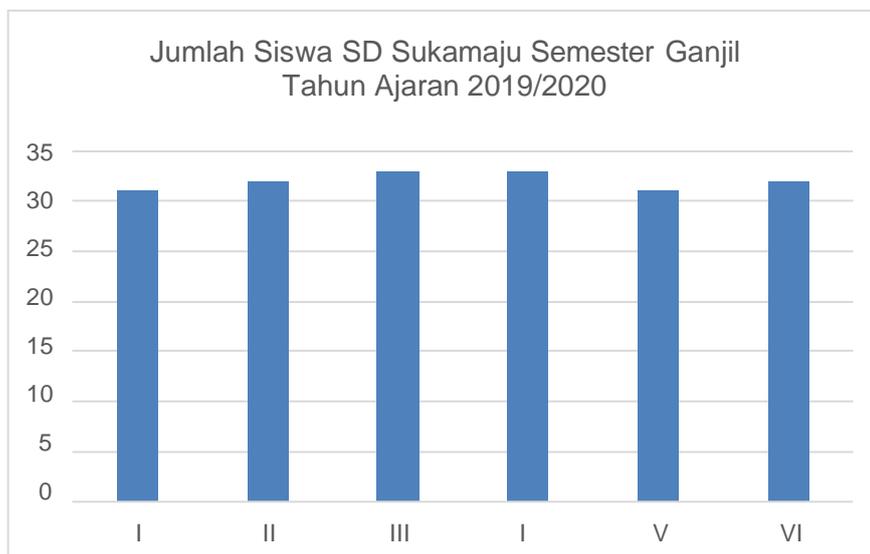


Diagram 2 Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil
Tahun Ajaran 2019/2020

Penyajian diagram batang, selain tampak pada Diagram 2 juga dapat menyajikan dua atau lebih data untuk menyatakan nilai dalam satu waktu tertentu. Perhatikan contoh Tabel 15 berikut ini.

Tabel 15 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Kelas	Banyak Siswa	
	Laki-Laki	Perempuan
I	17	14
II	21	11
III	15	18
IV	16	17
V	18	13
VI	14	18

Diagram batang dari Tabel 15 tersebut sebagai berikut.

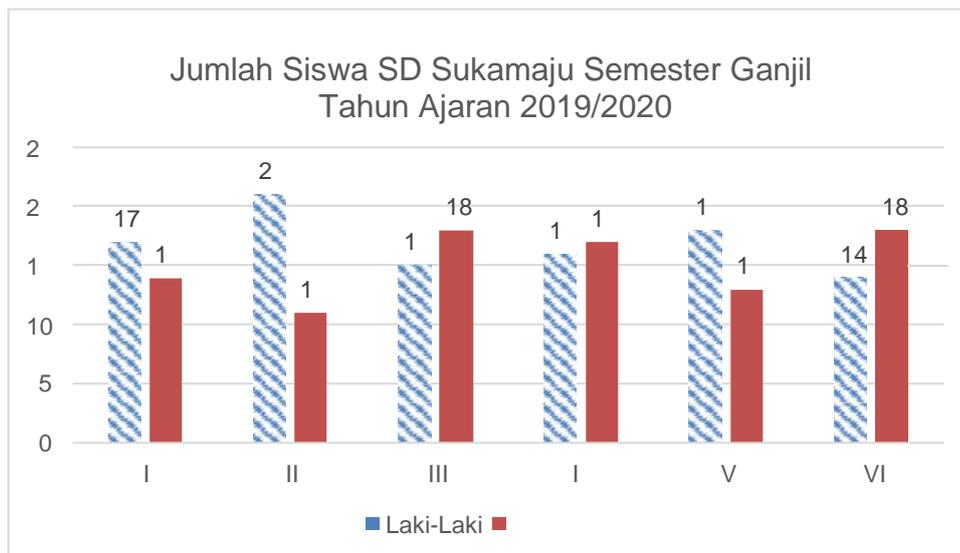


Diagram 3 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

3) Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran merupakan sebuah penyajian data dalam bentuk lingkaran didasarkan pada pembagian sebuah lingkaran dalam beberapa bagian sesuai dengan jenis data yang akan disajikan.

Contoh:

Tabel 16 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Kelas	Banyak Siswa		Jumlah
	Laki-Laki	Perempuan	
I	17	14	31
II	21	11	32
III	15	18	33
IV	16	17	33
V	18	13	31
VI	14	18	32
Jumlah	101	91	192

Berdasarkan Tabel 14 tersebut dapat dibuat diagram lingkaran sebagai berikut.

Diagram lingkaran banyak siswa laki-laki.

Sebelum menggambar diagram batang banyak siswa laki-laki, maka kita akan menentukan dulu besar daerah dari masing-masing kelas.

$$\text{Kelas } n : \frac{\text{banyaknya data pada kelas } n}{\text{banyak data seluruhnya}} \times 100\% \text{ atau}$$

$$\text{Kelas } n : \frac{\text{banyaknya data pada kelas } n}{\text{banyak data seluruhnya}} \times 360^\circ$$

$$\text{Kelas 1 : } \frac{17}{101} \times 100\% = 16,83\% \approx 17\% \text{ atau}$$

$$\text{Kelas 1 : } \frac{17}{101} \times 360^\circ = 60,59\%$$

Coba Anda cari untuk kelas yang lain!

Setelah mendapat besar bagian setiap kelas, maka diagram lingkarannya adalah sebagai berikut!

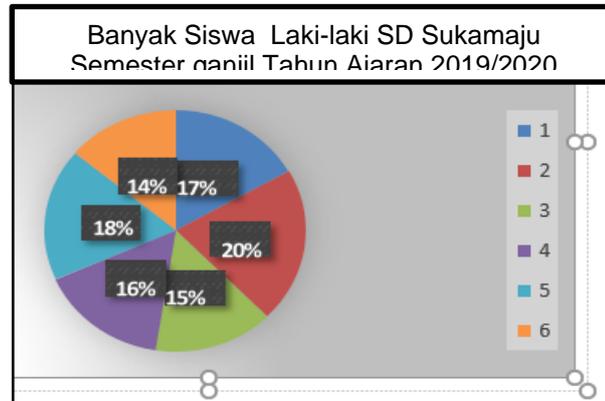


Diagram 4 Banyak Siswa Laki-Laki SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Selanjutnya, coba Anda buat diagram lingkaran untuk menyatakan banyak siswa perempuan SD Sukamaju semester ganjil tahun 2019/2020 dan diagram lingkaran untuk menyatakan banyak siswa keseluruhan SD Sukamaju semester ganjil tahun ajaran 2019/2020. Coba Anda lihat dan cocokkan hasil yang Anda buat dengan diagram berikut ini.

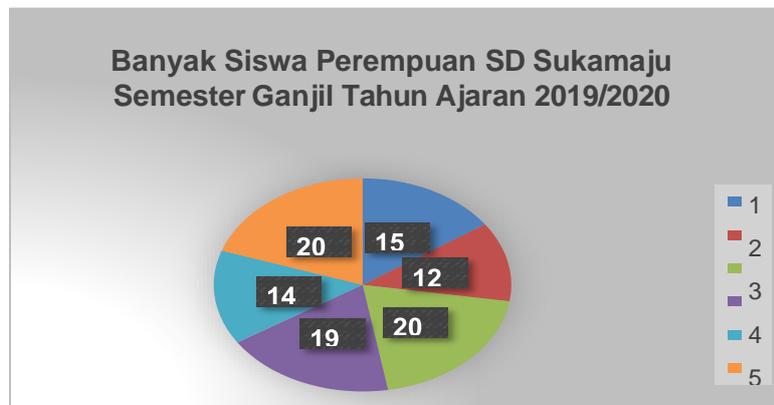


Diagram 5 Banyak Siswa Perempuan SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

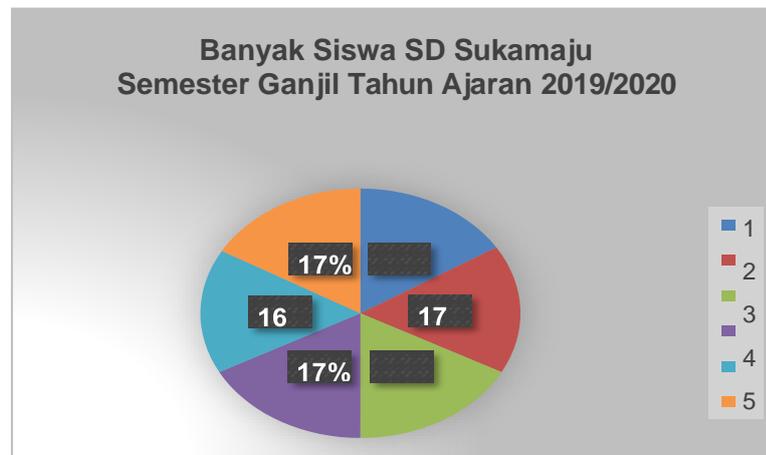


Diagram 6 Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil
Tahun Ajaran 2019/2020

3. Materi 3 Distribusi Frekuensi

Distribusi frekuensi adalah suatu susunan data mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar dan membagi banyaknya data menjadi beberapa kelas. Proses membuat sebuah tabel distribusi frekuensi, terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui adalah sebagai berikut.

- a. **Interval kelas:** yaitu banyak data yang dikelompokkan dalam bentuk rentang (interval) a - b , dimana data dimulai dari yang bernilai a sampai dengan data yang bernilai b . Data diurutkan dari terkecil sampai dengan terbesar, secara berurutan mulai kelas interval pertama sampai dengan interval terakhir.
- b. **Frekuensi:** yaitu banyaknya data pada suatu kelas interval tertentu. Banyak kelas dapat ditentukan dengan menggunakan aturan Sturges, $k = 1 + 3,3 \log n$.
- c. **Batas kelas interval:** yaitu bilangan yang terletak di sebelah kiri dan kanan suatu kelas interval, meliputi batas bawah dan batas atas.
- d. **Panjang kelas interval:** yaitu selisih antara dua tepi bawah yang berurutan.
- e. **Tepi kelas interval;** Tepi kelas interval dibagi menjadi 2, yaitu tepi atas dan tepi bawah. Tepi bawah kelas interval = batas bawah $- 0,5$, dan tepi atas kelas interval = batas atas $+ 0,5$ (untuk data yang dicatat sampai dengan satu satuan, untuk data hingga satu desimal batas bawah yaitu ujung bawah dikurangi $0,05$ dan batas atas yaitu ujung atas ditambah $0,05$, jika tercatat

hingga dua desimal maka angka pengurang/penambahnya menjadi 0,005 dan begitu seterusnya).

- f. **Nilai Tengah:** yaitu nilai data yang diambil sebagai wakil dari kelas interval itu yaitu dengan menggunakan rumus:

$$\frac{1}{2} (\text{ujung bawah} + \text{ujung atas}).$$

Perhatikan data nilai siswa berikut ini, misalkan kita mempunyai kumpulan data nilai tentang pelajaran matematika dari sebanyak 80 siswa, dan kita akan membuat tabel distribusi frekuensinya.

Tabel 17 Data nilai matematika dari 80 siswa

75	84	68	82	68	90	62	88	93	76
88	79	73	73	61	62	71	59	75	85
75	65	62	87	74	93	95	78	72	63
82	78	66	75	94	77	63	74	60	68
89	78	96	62	75	95	60	79	71	83
67	62	79	97	71	78	85	76	65	65
73	80	65	57	53	88	78	62	76	74
73	67	86	81	85	72	65	76	75	77

Untuk membuat distribusi frekuensi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Menentukan rentang (jangkauan).

Rentang atau jangkauan adalah selisih antara data terbesar dengan data terkecil. Menentukan rentang dapat menggunakan rumus berikut ini:

$$r = x_{max} - x_{min}$$

Keterangan :

r = rentang

x_{max} = data terbesar

x_{min} = data terkecil

Contoh :

Rentang dari data nilai matematika 80 siswa adalah:

$$r = x_{max} - x_{min}$$

$$x_{max} = \text{data terbesar} = 97$$

$$x_{min} = \text{data terkecil} = 53$$

$$r = 97 - 53 = 44$$

b. Menentukan banyak kelas interval.

Banyak kelas harus dibuat sedemikian rupa agar semua data nilai bisa tercakup pada kelas interval. Bila kelas intervalnya terlalu sedikit maka informasi yang diberikan akan menjadi tidak lengkap. Jumlah kelas yang sedikit mengakibatkan interval kelasnya menjadi besar sehingga variasi yang terinci secara individual akan hilang, atau sebaliknya bila jumlah interval terlalu banyak maka perhitungan menjadi tidak praktis dan pola frekuensinya menjadi kosong. Untuk menetapkan banyak kelas interval, dapat digunakan aturan *Sturges* yaitu:

$$k = 1 + 3.3 \log n$$

Keterangan:

k = banyak kelas

n = banyak data

Perhatikan kembali data nilai matematika siswa pada tabel 17 di atas. Dari data nilai matematika tersebut diperoleh:

$$k = 1 + (3.3) \log 80$$

$$k = 1 + (3.3) (1.9031)$$

$$k = 1 + 6.3 = 7.3 \text{ (dibulatkan menjadi 7)}$$

Banyak kelas interval dari data nilai matematika tersebut adalah 7 kelas.

c. Panjang kelas interval.

Panjang kelas interval adalah rentang dibagi dengan banyaknya kelas. Maka untuk menentukan panjang kelas interval ini digunakan rumus:

$$\text{Panjang kelas} = \frac{\text{Rentang}}{\text{banyak kelas}}$$

Perhatikan kembali contoh data nilai matematika pada halaman 17. Dari data nilai matematika di atas, dari data nilai tersebut dapat diperoleh:

$$\text{Rentang} = 97 - 53 = 44$$

$$\text{Banyak kelas } (k) = 7$$

$$\text{Panjang kelas} = \frac{44}{7} = 6,29 \text{ dibulatkan menjadi } 7$$

d. Batas bawah kelas pertama.

Memilih batas bawah kelas pertama dapat dilakukan dengan memilih nilai terkecil dari suatu data atau nilai yang lebih kecil dari data terkecil (dengan catatan selisihnya harus kurang dari panjang kelas).

Sebagai contoh, pada penyusunan tabel frekuensi untuk data nilai matematika, kita akan memilih 52 sebagai batas bawah kelas pertama (catatan: Anda boleh memilih bilangan yang lain sebagai tepi bawah kelas pertama). Perhatikan Tabel 18 berikut ini.

Tabel 18 Distribusi Frekuensi Nilai Matematika

Nilai	Turus	Frekuensi
52 - 58	II	2
59 - 65	I	16
66 - 72	II	12
73 - 79	II	27
80 - 86		10
87 - 93		8
94 - 100		5
Jumlah		80

4. Materi 4 Distribusi Frekuensi Relatif

Distribusi frekuensi relatif yaitu frekuensi dari sebuah daftar distribusi yang dinyatakan dalam bentuk persen. Frekuensi relatif dapat dihitung dengan rumus:

$$\text{Frekuensi Relatif} = \frac{\text{Frekuensi pada kelas ke } - n}{\text{Jumlah Frekuensi}} \times 100\%$$

Perhatikan data pada Tabel 19, frekuensi relatif dari setiap kelas dihitung seperti di bawah inil.

$$\text{Frekuensi relatif kelas pertama: } \frac{2}{80} \times 100\% = 2,5 \%$$

$$\text{Frekuensi relatif kelas pertama: } \frac{16}{80} \times 100\% = 20 \%$$

Coba Anda tentukan frekuensi relatif pada kelas yang lain!

Tabel 19 Frekuensi Relatif Data Nilai Matematika Siswa

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Relatif (%)
52 – 58	2	2,50
59 - 65	16	20,00
66 - 72	12	15,00
73 - 79	27	33,75
80 - 86	10	12,50
87 - 93	8	10,00
94 – 100	5	6,25
Jumlah	80	100,00

5. Materi 5 Ukuran Pemusatan Data

Ukuran pemusatan data adalah nilai dari data yang dapat memberikan gambaran yang lebih jelas dan singkat mengenai keadaan pusat data yang dapat mewakili seluruh data. Ukuran pemusatan data meliputi mean (rerata), median, dan modus.

a. Rerata (mean)

Rerata atau mean merupakan salah satu ukuran gejala pusat. Rerata dapat dikatakan sebagai wakil kumpulan data. Menentukan rerata data tunggal dapat

diperoleh dengan cara menjumlahkan seluruh nilai data dan membagi dengan banyak data, atau dapat ditulis dengan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\text{Jumlah seluruh data}}{\text{Banyak data}}$$

Keterangan: \bar{x} = rerata

$\sum x$ = jumlah seluruh data

n = banyak data

Contoh 1:

Hitung rerata dari 6, 5, 9, 7, 8, 8, 7, 6.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum X}{n} \\ \bar{X} &= \frac{5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9}{8} \\ \bar{X} &= \frac{56}{8} \\ \bar{X} &= 7\end{aligned}$$

Contoh 2:

Perhatikan Tabel 20 berikut ini.

Tabel 20 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai	Frekuensi
70	2
75	6
80	2
85	7
90	5
95	8
100	5
Jumlah	35

Tentukanlah rerata nilai matematika siswa kelas IV SD Sukamaju!

Untuk menentukan nilai rerata data pada Tabel 18, kita dapat menjumlahkan semua data dibagi banyak data, atau kita dapat menggunakan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Keterangan:

\bar{x} = rerata

f_i = frekuensi data ke - i

x_i = data kelas ke - i

$f_i x_i$ = hasil kali data kelas ke - i dengan frekuensi data ke - i

Tabel 21 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i x_i$
70	2	140
75	6	450
80	2	160
85	7	595
90	5	450
95	8	760
100	5	500
Jumlah	35	3055

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{X} = \frac{3055}{35} = 87,29$$

Contoh 3:

Terdapat 40 siswa kelas V yang mengikuti tes matematika didapat data sebagai berikut: siswa yang memperoleh nilai 4 ada 5 orang, nilai 5 ada 10 orang, nilai 6 ada 12 orang, nilai 7 ada 8 orang, nilai 8 ada 3 orang, dan nilai 9 ada 2 orang. Tentukan nilai rerata 40 siswa tersebut!

Penyelesaian:

Menentukan nilai rerata 40 orang siswa dapat dilakukan dengan:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum fi xi}{\sum fi} \\ \bar{X} &= \frac{(4 \times 5) + (5 \times 10) + (6 \times 12) + (7 \times 8) + (8 \times 3) + (9 \times 2)}{40} \\ \bar{X} &= \frac{20 + 50 + 72 + 56 + 24 + 18}{40} = \frac{240}{40} = 6\end{aligned}$$

Contoh 4:

Pada sebuah kelas terdapat 16 siswa laki-laki dan 14 siswa perempuan. Nilai rerata tes siswa laki-laki adalah 7,85 dan nilai rerata tes siswa perempuan adalah 8,06. Berapakah nilai rerata 30 siswa tersebut?

Penyelesaian:

Menentukan nilai rerata 30 siswa tersebut artinya bahwa kita akan mencari nilai rerata gabungan dari siswa laki-laki dan siswa perempuan.

Karena $\bar{X} = \frac{\text{Jumlah seluruh data}}{\text{Banyak data}}$, maka jumlah seluruh data = $\bar{X} \times$ banyak data.

Rerata gabungan

$$= \frac{(\bar{x}_l \times \text{banyak siswa laki} - \text{laki}) + (\bar{x}_p \times \text{banyak siswa perempuan})}{\text{Banyak siswa seluruhnya}}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{(16 \times 7,85) + (14 \times 8,06)}{30}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{(125,6) + (112,84)}{30}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{238,44}{30} = 7,948$$

Contoh 5:

Pada sebuah kelas terdapat 19 siswa laki-laki dan 17 siswa perempuan. Nilai rerata tes siswa keseluruhan adalah 8,59 dan nilai rerata tes siswa perempuan adalah 8,54. Berapakah nilai rerata siswa laki-laki?

Penyelesaian:

Berbeda dengan Contoh 4, pada contoh ini nilai rerata gabungan telah diketahui, sehingga:

$$\text{Rerata siswa laki - laki} = \frac{(\bar{X} \text{ banyak siswa}) - (\bar{X} \text{ siswa perempuan})}{\text{banyak siswa laki - laki}}$$

$$\begin{aligned}\text{Rerata siswa laki - laki} &= \frac{(36 \times 8,59) - (17 \times 8,54)}{19} \\ &= \frac{(309,24) - (145,18)}{19} \\ &= \frac{164,06}{19} = 8,63\end{aligned}$$

Bahasan selanjutnya adalah mencari nilai rerata dari data yang telah dikelompokkan dalam daftar distribusi frekuensi. Menentukan nilai rerata data yang telah dikelompokkan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang melibatkan titik tengah setiap kelas yaitu:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Keterangan:

\bar{x} = rerata

f_i = frekuensi data ke - i

x_i = data kelas ke - i

$f_i x_i$ = hasil kali nilai tengah data kelas ke- i dengan frekuensi data ke- i

Contoh 6:

Tentukan nilai rerata dari data yang terdapat pada Tabel 17!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 17 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	Nilai tengah (x_i)	$f_i \times x_i$
52 – 58	2	55	110
59 - 65	16	62	992
66 - 72	12	69	828
73 - 79	27	76	2052
80 - 86	10	83	830
87 - 93	8	90	720
94 – 100	5	97	485
Jumlah	80		6017

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6017}{80} = 7521$$

b. Median dan Kuartil

Median (Me) adalah nilai tengah dari sekumpulan data yang telah diurutkan, mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar atau sebaliknya. Jika banyak data merupakan bilangan ganjil, maka median terletak pada data ke- $\frac{1}{2}(n + 1)$, dan jika banyak data merupakan bilangan genap maka median terletak diantara data ke- $\frac{n}{2}$ dan data ke- $\frac{n}{2} + 1$

Contoh 7:

Tentukan median dari :

65, 70, 90, 40, 35, 45, 70, 80, 50.

Pada contoh ini banyak data yang tersedia merupakan bilangan ganjil. Setelah diurutkan datanya menjadi:

35, 40 , 45, 50, 65, 70, 70, 80, 90

Jadi $Me = 65$.

Contoh 8:

Tentukan median dari:

3, 2, 5, 2, 4, 6, 6, 7, 9, 6.

Pada contoh ini banyak data yang tersedia merupakan bilangan genap, median akan terletak diantara dua buah data.

Setelah diurutkan: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 9.

$$Me = \frac{5 + 6}{2} = 5,5$$

Contoh 9:

Tentukan median dari data yang terdapat pada Tabel 18!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 18 adalah data tunggal, sehingga untuk memudahkan menentukan median, kita tentukan terlebih dahulu frekuensi kumulatifnya.

Tabel 22 Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai	Frekuensi (f)	Frekuensi kumulatif (f_{kum})
70	2	2
75	6	8
80	2	10
85	7	17
90	5	22
95	8	30
100	5	35

Banyak data pada Tabel 22 tersebut merupakan bilangan ganjil, maka median akan terletak pada data ke- $\frac{1}{2}(n + 1)$ atau terdapat pada data ke- $\frac{1}{2}(35 + 1)$. Karena median terletak pada data ke-18, maka median data tersebut adalah 90 (mengapa? Berdasarkan data tersebut maka data ke-1 dan data ke-2 nilainya 70, data ke-3 sampai data ke-8 nilainya 75, data ke-9 sampai data ke-10 nilainya 80, dan seterusnya).

Bahasan selanjutnya adalah bagaimana kita menentukan median pada data yang berkelompok. Menentukan Me data yang telah dikelompokkan dapat

menggunakan rumus: $Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$

Keterangan:

Me = Median.

b = Tepi bawah kelas median.

p = Panjang kelas median.

f = Frekuensi kelas median.

F = Jumlah semua frekuensi sebelum kelas median.

n = Banyak data.

Contoh 10:

Tentukanlah median pada data Tabel 17!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 17 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	f_{kum}
52 – 58	2	2
59 - 65	16	18
66 - 72	12	30
73 - 79	27	57
80 - 86	10	67
87 - 93	8	75
94 - 100	5	80
Jumlah	80	

Karena banyak data 80, maka median akan berada diantara data ke- 40 dan data ke-41 yang berada pada kelas interval 73-79 (mengapa? Karena data ke- 31 sampai data ke- 57 nilainya pada interval 73-79).

Tepi bawah kelas median (b) = $73 - 0,5 = 72,5$.

Panjang kelas (p) = 7 (**Mengapa?** Dari 73 – 79 terdapat 7 data).

$$Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$$

$$Me = 72,5 + 7 \left(\frac{\frac{1}{2}80 - 30}{27} \right)$$

$$Me = 72,5 + 7 \left(\frac{10}{27} \right)$$

$$Me = 72,5 + 2,59$$

$$Me = 75,09$$

Seperti kita ketahui bersama, median membagi data menjadi dua bagian yang sama. Apabila kelompok data setelah diurutkan dibagi menjadi empat bagian yang sama banyak, maka kita akan dapat menentukan ukuran yang lain yaitu Q_1 , Q_2 , dan Q_3 atau yang sering juga disebut dengan kuartil pertama, kuartil kedua, dan kuartil ketiga. Q_2 atau kuartil kedua disebut juga dengan median. Untuk menentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 dapat menggunakan aturan sebagai berikut.

$$Q_i = \text{Nilai pada data ke} - \frac{i(n+1)}{4}, i = 1,2,3$$

Perhatikan kembali Contoh 7 pada bahasan sebelumnya.

Contoh 11:

Berdasarkan data pada Contoh 7, tentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 !

65, 70, 90, 40, 35, 45, 70, 80, 50.

Penyelesaian:

Untuk menentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 , maka terlebih dahulu kita harus mengurutkannya. Pada contoh tersebut banyak data yang tersedia sebanyak 9 data. Setelah diurutkan datanya menjadi:

35, 40, 45, 50, 65, 70, 70, 80, 90

$$Q_1 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{i(n+1)}{4}$$

$$Q_1 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{1(9+1)}{4}$$

$$Q_1 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{(10)}{4}$$

$$Q_1 = \text{Nilai pada data ke } - 2\frac{1}{2} \text{ (artinya } Q_1 \text{ terletak diantar data ke } - 2 \text{ dan ke } - 3)$$

$$\text{Jadi, } Q_1 = \frac{1}{2} (40 + 45) = 42,5$$

$$Q_2 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{2(9+1)}{4}$$

$$Q_2 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{(20)}{4}$$

$$Q_2 = \text{Nilai pada data ke } - 5 \text{ (artinya } Q_2 \text{ terletak pada data ke } - 5)$$

$$\text{Jadi, } Q_2 = \text{median} = 65$$

$$Q_3 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{3(9+1)}{4}$$

$$Q_3 = \text{Nilai pada data ke } - \frac{(30)}{4}$$

$$Q_3 = \text{Nilai pada data ke } - 7\frac{1}{2} \text{ (artinya } Q_3 \text{ terletak diantar data ke } - 7 \text{ dan ke } - 8)$$

$$\text{Jadi, } Q_3 = \frac{1}{2} (70 + 80) = 75$$

Nah, bagaimana untuk data berkelompok? Untuk menentukan Q_2 kita dapat menggunakan rumus median, sedangkan untuk menentukan Q_1 dan Q_3 dapat menggunakan rumus:

$$Q_1 = b + p \left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f} \right)$$

$$Q_3 = b + p \left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f} \right)$$

Keterangan:

- Q_i = Kuartil ke- i
- b = Tepi bawah kelas kuartil ke- i .
- p = Panjang kelas kuartil ke- i .
- f = Frekuensi kelas kuartil ke- i .
- F = Jumlah semua frekuensi sebelum kelas kuartil ke- i .
- n = Banyak data.

Contoh 12:

Tentukanlah Q_1 dan Q_3 pada data Tabel 17!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 17 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	f_{kum}
52 - 58	2	2
59 - 65	16	18
66 - 72	12	30
73 - 79	27	57
80 - 86	10	67
87 - 93	8	75
94 - 100	5	80
Jumlah	80	

Q_1 akan berada pada data ke- $\frac{n}{4}$ atau data ke-20 (data ke-20 berada pada kelas interval 66 - 72).

Tepi bawah kelas median (b) = 66 - 0,5 = 65,5.

Panjang kelas (p) = 7 (**Mengapa?** Dari 66 - 72 terdapat 7 data).

$$Q_1 = b + p \left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f} \right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 7 \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \times 80 \right) - 18}{12} \right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 7\left(\frac{2}{12}\right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 1,167$$

$$Q_1 = 66,67$$

Q_3 akan berada pada data ke- $\frac{3n}{4}$ atau data ke-60 (data ke-60 berada pada kelas interval 80 - 86).

Tepi bawah kelas median (b) = $80 - 0,5 = 79,5$.

Panjang kelas (p) = 7 (mengapa? Dari 80 – 86 terdapat 7 data).

$$Q_3 = b + p\left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f}\right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 7\left(\frac{\left(\frac{3}{4} \times 80\right) - 57}{10}\right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 7\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 2,1$$

$$Q_3 = 81,6$$

c. Modus

Modus merupakan ukuran pemusatan data untuk menyatakan fenomena yang paling banyak terjadi atau data yang paling sering muncul. Sekumpulan data yang diperoleh memungkinkan memiliki nilai modus yang tidak tunggal.

Contoh 13:

Tentukan modus dari data-data berikut ini: 65, 70, 90, 70, 40, 40, 40, 35, 45, 70, 80, 50!

Penyelesaian:

Setelah diurutkan datanya menjadi: 35, 40, 40, 40, 45, 50, 65, 70, 70, 70, 80, 90, maka kita mengetahui bahwa nilai 40 ada 3 dan nilai 70 ada 3, maka modus (M_o) dari data tersebut adalah 40 dan 70.

Bahasan selanjutnya adalah bagaimana menentukan nilai modus jika data yang

dimiliki adalah data yang berkelompok. Menentukan modus untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut.

$$M_o = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

Keterangan:

M_o = Modus.

b = Tepi bawah kelas modus.

p = Panjang kelas modus.

b_1 = Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas sebelumnya.

b_2 = Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas berikutnya.

Contoh 14:

Tentukanlah modus pada data Tabel 17!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 17 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i
52 – 58	2
59 - 65	16
66 - 72	12
73 - 79	27
80 - 86	10
87 - 93	8
94 - 100	5
Jumlah	80

Berdasarkan data tersebut frekuensi yang paling banyak muncul berada pada interval atau kelas 73 – 79.

Tepi bawah kelas modus (b) = $73 - 0,5 = 72,5$

Panjang kelas modus (p) = 7

b_1 = $27 - 12 = 15$

$$b_2 = 27 - 10 = 17$$

$$M_o = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

$$M_o = 72,5 + 7 \left(\frac{15}{15 + 17} \right)$$

$$M_o = 72,5 + 7 \left(\frac{15}{32} \right)$$

$$M_o = 72,5 + 3,28$$

$$M_o = 75,78$$

6. Materi 6 Ukuran Penyebaran Data

Ukuran penyebaran data merupakan suatu ukuran yang menyatakan seberapa besar penyimpangan nilai-nilai data dari nilai-nilai pusat datanya. Perhatikan contoh data dua kelompok nilai tes berikut ini.

Tabel 23 Nilai Kelompok A dan Kelompok B

Kelompok A	70	65	60	60	60	65	70	65	75	60
Kelompok B	90	80	70	30	10	75	75	50	80	90

Catatan: Data fiktif

Dari data di atas apabila kita hitung rerata kelompok A adalah 65, dan rerata kelompok B adalah 65. Rerata kedua kelompok tersebut sama, tetapi jika kita lihat dari penyebaran data pada dua kelompok tersebut dapat dilihat data kelompok A lebih merata daripada data pada kelompok B. Untuk melihat penyebaran data, kita bisa melihat dari nilai range (selang), simpangan baku dan varians.

a Range (Interval)

Range merupakan metode pengukuran paling sederhana yang digunakan untuk mengukur ketersebaran suatu data. Nilai range sangat dipengaruhi dengan adanya data atau nilai pencilan (data yang sangat jauh dari data-data yang lain), oleh karena itu range bukanlah merupakan ukuran yang baik untuk menunjukkan

ketersebaran suatu data. Nilai range juga hanya dipengaruhi oleh dua buah data (data terkecil dan data terbesar (data yang lain dapat diabaikan)). Sebagai contoh, lihat kembali Tabel 21, berdasarkan data pada Tabel 21, nilai range kelompok A adalah $75 - 60 = 15$, dan nilai range kelompok B adalah $90 - 10 = 80$.

b. Simpangan Baku

Simpangan baku merupakan ukuran statistik yang paling sering digunakan untuk mengukur tingkat ketersebaran suatu data. Nilai simpangan baku menunjukkan seberapa dekat nilai-nilai suatu data dengan nilai reratanya. Simpangan baku biasa dilambangkan dengan s . Menentukan nilai simpangan baku data yang tidak berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut.

$$s = \sqrt{\sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Keterangan:

- s = Simpangan baku.
- x_i = Nilai data ke- i .
- \bar{x} = Nilai rerata.
- n = Banyak data.

Menentukan nilai simpangan baku untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut.

$$s = \sqrt{\sum \frac{f(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Keterangan:

- s = Simpangan baku.
- x_i = Nilai tengah data pada kelas interval ke- i .
- \bar{x} = Nilai rerata.
- n = Banyak data.

Contoh 15:

Tentukan nilai simpangan baku dari data pada Tabel 18!

Penyelesaian:

Data Tabel 18 dan nilai reratanya adalah sebagai berikut (lihat contoh 2).

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{X} = \frac{3055}{35} = 87,25$$

x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
70	2	-17,29	298,94	597,88
75	6	-12,29	151,04	906,24
80	2	-7,29	53,14	106,28
85	7	-2,29	5, 24	36,68
90	5	2,71	7, 34	36,70
95	8	7,71	59, 44	475,52
100	5	12,71	161,54	807,70
Jumlah	35			2967

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum 2967}{34}}$$

$$s = \sqrt{87,26} = 9,34$$

Contoh 16:

Tentukanlah nilai simpangan baku dari Tabel 17!

Penyelesaian:

Data dari tabel 17 adalah sebagai berikut.

$$\bar{X} = \frac{\sum fix_i}{\sum f_i} = \frac{6017}{80} = 75,21$$

Nilai	f_i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
52 - 58	2	55	-20,21	408,44	816,88
59 - 65	16	62	-13,21	174,50	2792
66 - 72	12	69	-6,21	38,56	462,72
73 - 79	27	76	0,79	0,62	16,74
80 - 86	10	83	7,79	60,68	606,8
87 - 93	8	90	14,79	218,74	1749,92
94 - 100	5	97	21,79	474,80	2374
Jumlah	80				8819,06

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{8819,06}{79}}$$

$$s = \sqrt{111,63} = 10,57$$

c. Varians

Varians merupakan salah satu ukuran penyebaran data selain range dan simpangan baku. Nilai varians dapat diperoleh dari nilai kuadrat simpangan baku, sehingga varians dilambangkan dengan s^2 . Menentukan nilai varians data yang tidak berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut.

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Keterangan:

s^2 = Varians.

x_i = Nilai data ke- i.

\bar{x} = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Menentukan nilai varians untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut.

$$s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Keterangan:

s^2 = Varians.

x_i = Nilai data ke- i .

\bar{x} = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Berdasarkan data pada contoh 15 dan contoh 16, tentukanlah varians dari data-data tersebut!

7. Materi 7 Nilai Baku

Nilai baku merupakan sebuah nilai yang menyatakan perbandingan antara selisih nilai data dengan reratanya dibagi simpangan baku data tersebut. Nilai baku merupakan sebuah bentuk perubahan yang dipakai untuk membandingkan dua buah keadaan atau lebih. Nilai baku juga dapat dipakai untuk mengetahui kedudukan suatu objek dibandingkan keadaan yang lebih umum. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut. Nilai baku dilambangkan dengan z , dengan rumus:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Nilai baku dapat bernilai positif dan mungkin juga bernilai negatif.

Contoh 17:

Firman mengikuti tes seleksi olimpiade matematika wilayah Jawa Barat memperoleh nilai 87, dan nilai rerata wilayah Jawa Barat adalah 86 dengan simpangan baku 12. Hary mengikuti tes seleksi yang sama untuk wilayah Sumatera Barat memperoleh nilai 85, dan nilai rerata wilayah Sumatera Barat adalah 83 dengan simpangan baku 10. Jika nilai mereka diurutkan secara nasional, nilai manakah yang lebih baik?

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai yang lebih baik, maka kita harus merubah nilai yang diperoleh menjadi nilai baku.

$$z_{Firman} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{87 - 86}{12} = \frac{1}{12} = 0,083$$

$$z_{Hary} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{85 - 83}{10} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Berdasarkan data tersebut terlihat bahwa z_{Hary} lebih dari z_{Firman} , artinya nilai Firman lebih baik daripada nilai Hary.

8. Materi 8 Kaidah Pencacahan

Kaidah pencacahan dapat membantu kita memecahkan masalah untuk menghitung banyaknya cara yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan. Kaidah pencacahan meliputi aturan penjumlahan, aturan pengisian tempat (aturan perkalian), permutasi, dan kombinasi.

a. Aturan Penjumlahan

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 18:

Irma akan pergi ke toko kue untuk membeli beberapa jenis kue. Pada toko kue yang didatangi oleh Irma hanya tersedia 7 jenis kue yang dimasak dengan cara dikukus, dan 9 jenis kue yang dimasak dengan cara dipanggang. Berapa kue yang dapat dipilih oleh Irma?

Penyelesaian:

Banyak kue yang dapat dipilih oleh Irma adalah sebanyak $7 + 9 = 16$ pilihan (karena jenis kue yang tersedia tidak saling beririsan).

Contoh 19:

Ani akan pergi berpergian dari kota Semarang ke kota Surabaya menggunakan transportasi umum. Setelah mencari informasi, Ani mencatat untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya dapat menggunakan bis dengan jadwal

keberangkatan pukul 08.00, pukul 13.00, dan pukul 18.00, atau dapat juga menggunakan kereta api dengan jadwal keberangkatan pukul 14.30 dan 19.00. Ada berapa banyak cara yang dapat dipilih Ani untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya?

Penyelesaian:

Banyak cara yang dapat dipilih Ani adalah $3 + 2 = 5$ cara (mengapa?).

Apabila terdapat a_1 benda pada peristiwa atau himpunan pertama, dan a_2 benda pada peristiwa atau himpunan kedua, dan kedua himpunan tidak beririsan, maka banyak cara yang dapat dipilih adalah $a_1 + a_2$.

b. Aturan Pengisian Tempat (Aturan Perkalian)

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 20:

Firman berencana membuat kartu-kartu yang bertuliskan bilangan-bilangan untuk kegiatan di sekolah. Kartu-kartu tersebut bertuliskan bilangan puluhan dengan syarat tidak boleh ada angka yang sama. Berapa banyak kartu yang disiapkan oleh Firman?

Penyelesaian:

Kartu-kartu yang dibuat Firman berisikan bilangan puluhan, dengan syarat angkanya tidak boleh sama. Bilangan-bilangan yang dapat dibuat Firman ada pada daftar berikut ini:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	-	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	-	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	-	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	-	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	-	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	-	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	-	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	-	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	-

Apabila dihitung berdasarkan tabel tersebut, maka terdapat 81 bilangan. Secara matematis dapat ditentukan sebagai berikut.

Banyak angka yang mungkin pada angka pertama ada 9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9).

Banyak angka yang mungkin pada bilangan kedua (dengan syarat tidak boleh sama dengan angka pertama) adalah ada 9 (mengapa? Banyak angka yang mungkin pada angka kedua ada 10 angka, tetapi karena tidak boleh ada yang sama, maka banyak angka yang mungkin adalah 9 angka, perhatikan ilustrasi berikut ini: misalkan Firman telah memilih angka 5, maka angka 5 tidak boleh muncul di angka kedua, sehingga banyak angka yang mungkin adalah $10 - 1 = 9$).

Banyak bilangan yang terbentuk adalah $9 \times 9 = 81$.

Contoh 21:

Dewi menerima undangan untuk tampil pada acara pementasan seni SD Sukamakmur. Dewu menyiapkan 4 buah celana yang berwarna hitam, putih, biru, dan coklat. Dewu juga menyiapkan 5 baju yang berwarna merah, hijau, kuning, biru, dan putih, serta menyiapkan 2 buah topi yang berwarna hitam dan biru. Berapa banyak cara Dewu memilih celana, baju, dan topi yang akan dipakainya?

Penyelesaian:

$$a_1 = \text{kejadian 1 (dalam hal ini banyak celana)} = 4$$

$$a_2 = \text{kejadian 2 (dalam hal ini baju)} = 5$$

$$a_3 = \text{kejadian 3 (dalam hal ini topi)} = 2$$

Banyak cara Dewi memilih celana, baju, dan topi adalah:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 = 4 \times 5 \times 2 = 40 \text{ cara.}$$

Dapatkan Anda mendaftar pasangan celana, baju, topi yang mungkin akan dipakai? Contoh: Dewi akan menggunakan celana hitam, baju merah, dan topi hitam.

Contoh 22:

Kode 5 karakter disusun dengan ketentuan sebagai berikut: karakter pertama berupa angka yang merupakan bilangan genap, karakter kedua berupa huruf hidup, karakter ketiga berupa angka kelipatan tiga, serta karakter keempat dan karakter kelima berupa angka tetapi tidak boleh sama. Berapa banyak kode yang mungkin dibuat ?

Penyelesaian:

Angka genap	Huruf hidup	Angka kelipatan tiga	Angka	Angka (tidak boleh sama dengan karakter ke-4)
2,4,6,8	a, i, u, e, o	3, 6, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Misal 1 sudah dipilih di Karakter 4, maka kemungkinan hanya tinggal 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
$a_1 = 4$	$a_2 = 5$	$a_3 = 3$	$a_4 = 10$	$a_5 = 9$

Banyak kode yang mungkin dibuat adalah:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 4 \times 5 \times 3 \times 10 \times 9 = 5.400 \text{ kode.}$$

Apabila suatu peristiwa pertama dapat dikerjakan dengan a_1 cara yang berbeda, peristiwa kedua dapat dikerjakan dengan a_2 cara yang berbeda dan seterusnya sampai peristiwa ke- n , maka banyaknya cara yang berbeda Misalkan terdapat n tempat yang akan diisi dengan a_1 (banyaknya cara untuk mengisi tempat pertama), a_2 (banyaknya cara untuk mengisi tempat kedua), dan seterusnya hingga a_n (banyaknya cara untuk mengisi tempat ke- n); maka total untuk mengisi tempat tersebut adalah $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

c. Permutasi

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 23:

Pada suatu pemilihan ketua kelas dan wakil ketua kelas, terdapat 3 siswa yang mendaftar yaitu Feri, Malik, dan Runa. Berapa banyak kemungkinan pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang akan terpilih?

Penyelesaian:

Siswa yang mendaftar adalah Feri, Malik, dan Runa.

Ketua Kelas	Wakil Ketua Kelas
Feri	Malik
Feri	Runa
Malik	Runa
Malik	Feri
Runa	Feri
Runa	Malik

Perhatikan bahwa Feri – Malik akan berbeda dengan Malik – Feri, mengapa? Karena Feri sebagai ketua kelas berbeda dengan Feri sebagai wakil ketua kelas. Pada kasus ini, urutan sangatlah diperhatikan.

Banyak pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang mungkin ada 6 pasangan.

Nah, secara matematis, bagaimana menghitungnya? Perhatikan penjelasan berikut ini.

Permutasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutannya. Perhitungan banyak susunan atau banyak cara berdasarkan permutasi sangat bergantung pada banyaknya objek yang tersedia dan banyak objek yang akan diambil.

Catatan: Sebelum membahas tentang permutasi, perlu diketahui tentang notasi faktorial. Untuk setiap bilangan bulat positif n , berlaku $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ dan $0! = 1$.

1) Permutasi semua objek diambil.

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, maka banyak permutasi yang dapat dibentuk dari semua objek adalah:

$${}_n P_n = P(n, n) = n! \text{ cara.}$$

Contoh 24:

Terdapat empat buah bendera yang akan disusun di sebuah ruangan, maka banyak cara menyusun bendera adalah

Penyelesaian:

Banyak bendera = $n = 4$.

Banyak cara menyusun bendera yang mungkin adalah:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ cara.}$$

2) Permutasi sebagian objek diambil.

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, jika k objek diambil dari n objek, maka banyak permutasi yang mungkin adalah:

$${}_n P_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ susunan}$$

Contoh 25:

Pada sebuah kelas akan diadakan pemilihan kepengurusan kelas yang meliputi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Saat penjurangan, ada 9 siswa yang akan mengikuti pemilihan tersebut. Berapa banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut?

Penyelesaian:

Banyak siswa = $n = 9$. Banyak objek = $k = 3$.

Banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut adalah:

$${}_n P_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_9 P_3 = P(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 504 \text{ susunan}$$

3) Permutasi dengan pengulangan

Misalkan terdapat n objek dengan n_1 adalah banyak objek pertama yang sama, n_2 adalah banyak objek kedua yang sama,

n_3 adalah banyak objek ketiga yang sama, ..., n_k adalah banyak objek ke- k yang sama; maka banyak permutasi yang dapat dibentuk ada $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$ susunan.

Contoh 26:

Banyak cara untuk menyusun huruf dari kata MATEMATIKA adalah

Penyelesaian:

Banyak huruf dari MATEMATIKA, $n = 10$.

$n_1 =$ huruf M = 2.

$n_2 =$ huruf A = 3.

$n_3 =$ huruf T = 2.

$$P_{10,2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200 \text{ susunan}$$

4) Permutasi melingkar.

Misalkan terdapat sejumlah objek yang berbeda, permutasi yang dapat dibentuk dari sejumlah objek itu yang membentuk lingkaran dinamakan permutasi melingkar. Hal yang perlu diperhatikan adalah penetapan terlebih dahulu salah satu objeknya. Penghitungan banyak permutasi melingkar yang dapat dibentuk bergantung pada objek yang tersedia.

Apabila kita mempunyai n objek berbeda, maka banyak permutasi melingkar yang dapat dibentuk adalah $(n - 1)!$ susunan.

Contoh 27:

Ayah, ibu, kakak, dan adik duduk mengelilingi meja bundar. Banyak susunan yang dapat dibuat oleh ayah, ibu, kakak, dan adik adalah

Penyelesaian:

Banyak orang = $n = 4$

Banyak susunan = $(n - 1)! = (4 - 1)! = 3! = 6$ susunan.

4) Kombinasi

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 28:

Amar, Dzaky, dan Hendra mengikuti kegiatan seminar yang sama. Ketiga orang tersebut saling berjabat tangan sambil memperkenalkan diri mereka. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi diantara ketiganya?

Penyelesaian:

Jabat tangan yang mungkin adalah: Amar – Dzaky, Amar – Hendra, Dzaky – Hendra. Bagaimana dengan Dzaky – Amar? Jabat tangan Amar – Dzaky dan Dzaky – Amar adalah sama. Pada kasus seperti ini urutan tidak diperhatikan.

Banyak jabat tangan yang terjadi adalah 3 jabat tangan. Secara matematis perhatikan definisi berikut ini:

Kombinasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutannya. Apabila kita memiliki n objek yang berbeda, maka banyak kombinasi yang dapat dibentuk dari semua objek itu ada satu cara. Misalnya kita memiliki n objek berbeda, apabila kita akan mengambil k objek dari n objek, maka banyak kombinasi yang mungkin ada:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ cara.}$$

Contoh 29:

Pada suatu ruangan terdapat 8 orang dan mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah

Penyelesaian:

$$n = 8$$

$k = 2$ (satu kali jabat tangan melibatkan 2 orang).

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C(8,2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!6!} = 28 \text{ jabat tangan}$$

9. Materi 9 Peluang

Peluang digunakan untuk melihat kemungkinan terjadinya sebuah kejadian. Sebelum mendefinisikan apa itu peluang, ada beberapa istilah yang harus Anda ketahui:

- Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan.
Misalkan kita melempar sebuah uang logam. Pada sebuah uang logam terdapat angka (A) dan gambar (G). maka ruang sampel dari percobaan itu adalah $\{A, G\}$.
- Titik sampel adalah anggota dari ruang sampel.
Pada contoh melempar uang logam, titik sampelnya adalah A dan G.

Jika A adalah suatu kejadian dengan ruang sampel S, maka peluang kejadian A (ditulis $P(A)$) adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyak cara terjadi kejadian A}}{\text{banyak semua kemungkinan}}$$

Nilai dari sebuah peluang adalah $0 \leq P(A) \leq 1$, sebuah kejadian yang memiliki nilai peluang nol merupakan kejadian yang mustahil, dan sebuah kejadian memiliki nilai peluang satu merupakan kejadian yang pasti.

Contoh 30:

Pada sebuah kelas, guru akan memilih satu orang perwakilan untuk membacakan hasil pengamatannya. Jika pada kelas tersebut terdapat 18 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan, maka berapakah peluang terpilihnya murid laki-laki?

Penyelesaian:

A = Kejadian terpilihnya murid laki-laki.

$$n(A) = 18 \quad n(S) = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Jadi, peluang terpilihnya murid laki-laki adalah $\frac{3}{5}$

D. Rangkuman

1. Statistik, Statistika, dan Data

- a. Statistik adalah kesimpulan fakta berbentuk bilangan yang disusun dalam bentuk daftar atau tabel yang menggambarkan suatu kejadian.
- b. Statistika juga merupakan suatu metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, perhitungan, penggambaran dan penganalisisan data, serta penarikan kesimpulan berdasarkan penganalisisan yang dilakukan.
- c. Data adalah sejumlah informasi yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah.
- d. Menurut sifatnya, data dibagi menjadi data kualitatif dan data kuantitatif.
- e. Menurut cara memperolehnya, data dibagi menjadi data primer dan data sekunder.
- f. Menurut sumbernya, data dibagi menjadi data internal dan data eksternal.

2. Penyajian Data

- a. Penyajian data dapat dilakukan dengan menggunakan tabel atau diagram.
- b. Berbagai bentuk tabel diantaranya: baris – kolom, kontingensi, distribusi frekuensi.
- c. Berbagai macam diagram diantaranya: diagram lambang, diagram batang, dan diagram lingkaran.

3. Distribusi Frekuensi

- a. Distribusi frekuensi adalah suatu susunan data mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar dan membagi banyaknya data menjadi beberapa kelas.
- b. Tabel distribusi frekuensi merupakan sebuah tabel yang berisi data yang

dikelompokkan ke dalam interval.

- c. Langkah membuat tabel distribusi frekuensi: menentukan rentang, menentukan banyak kelas interval, menentukan panjang kelas interval, serta menentukan frekuensi.

4. Distribusi Frekuensi Kumulatif

Tabel distribusi frekuensi kumulatif merupakan tabel distribusi frekuensi, dimana frekuensinya dijumlahkan kelas interval demi kelas interval.

5. Ukuran Pemusatan Data

- a. Rerata atau mean merupakan salah satu ukuran gejala pusat. Mean merupakan wakil kumpulan data.
- b. Untuk menentukan rerata dari data tunggal dapat dihitung dengan

$$\text{rumus } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ atau } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

- c. Untuk menentukan rerata dari data kelompok dapat dihitung dengan rumus $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

- d. Median merupakan nilai tengah dari sekumpulan data yang diurutkan.
- e. Untuk menentukan median dapat dihitung dengan rumus:

$$Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$$

- f. Modus merupakan gejala dengan frekuensi tertinggi atau yang sering terjadi.
- g. Untuk mencari M_o data yang telah dikelompokkan digunakan rumus

$$M_o = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

6. Ukuran Penyebaran Data

- a. Range merupakan metode pengukuran paling sederhana yang digunakan untuk mengukur ketersebaran suatu data. Range merupakan selisih dari data terbesar dan data terkecil.

- b. Simpangan baku merupakan ukuran statistik untuk mengukur tingkat ketersebaran suatu data. Nilai simpangan baku menunjukkan seberapa dekat nilai-nilai suatu data dengan nilai reratanya.
- c. Nilai varians dapat diperoleh dari nilai kuadrat simpangan baku.

7. Nilai baku

Nilai baku merupakan sebuah nilai yang menyatakan perbandingan antara selisih nilai data dengan reratanya dibagi simpangan baku data tersebut.

Pembelajaran 6. Kapita Selekta Matematika

**Sumber: Modul Pendidikan Profesi Guru
Modul 2 Pendalaman Materi Matematika**
Penulis: Andhin Dyas Fioiani, M. Pd.

A. Kompetensi

1. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi logika, pola bilangan, persamaan linear, persamaan kuadrat dan grafik fungsi polinomial.
2. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika secara mendalam.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Menarik kesimpulan matematis dengan menggunakan penalaran logis.
2. Menentukan rumus dari suatu pola bilangan.
3. Menentukan rumus dari suatu deret bilangan.
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan linear.
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.
6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi linear.
7. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi kuadrat.
8. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan trigonometri.

C. Uraian Materi

Pada bagian ini akan dibahas lima materi, yaitu: (1) logika matematika, (2) pola, barisan, dan deret bilangan, (3) persamaan linear, pertidaksamaan linear, dan grafik fungsi linear, (4) persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, dan grafik fungsi kuadrat, dan (5) trigonometri.

1. Materi 1 Logika Matematika

Pada materi 1 logika matematika akan dibahas tentang: (a) pernyataan, (b) operasi uner, (c) operasi biner, (d) Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, dan (e) Konvers, Invers, dan Kontrapositif, (f) Penarikan Kesimpulan

a Pernyataan

Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran benar atau salah, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan. Pernyataan biasa dilambangkan dengan p, q, r, \dots

Contoh pernyataan:

p : Herman adalah siswa sekolah dasar kelas VI.

s : $56-19 = 35$.

Adapun contoh bukan pernyataan:

1) Apakah hari ini akan hujan?

2) $9x - 5 = 4x + 2$

Pernyataan dikelompokkan menjadi 2, yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Pernyataan majemuk merupakan kalimat baru yang diperoleh dari berbagai penggabungan pernyataan tunggal.

Suatu pernyataan hanya bisa bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak keduanya dalam waktu yang bersamaan. Kebenaran atau kesalahan dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p dilambangkan dengan $\tau(p)$.

b Operasi Uner

Operasi uner disebut juga dengan operasi negasi atau ingkaran. Operasi negasi merupakan operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur. Operasi negasi biasa dilambangkan dengan \sim . Nilai kebenaran negasi sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataannya.

p	$\sim p$
B	S

c. Operasi Biner

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur. Operasi biner berkenaan dengan dua pernyataan. Ada 4 macam operasi biner yang akan dipelajari:

1) Operasi konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal dihubungkan dengan kata “dan” disebut konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan “ \wedge ”. Sebuah konjungsi benar jika konjung- konjungnya benar, tetapi salah jika salah satu atau kedua-duanya salah. Tabel kebenaran untuk operasi konjungsi adalah sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh:

p : 4 adalah bilangan genap.

q : 4 habis dibagi oleh 2.

$p \wedge q$: 4 adalah bilangan genap dan 4 habis dibagi oleh 2.

2) Operasi disjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata “atau” disebut disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan “ \vee ”. Sebuah disjungsi inklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar atau kedua-duanya, dan sebuah disjungsi eksklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar tetapi tidak kedua-duanya. Tabel kebenaran untuk operasi disjungsi (dalam hal ini adalah disjungsi inklusif) adalah sebagai berikut.

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh:

p : Ani akan membawa buku gambar.

q : Ani akan membawa buku tulis.

$p \vee q$: Ani akan membawa buku gambar atau buku tulis.

3) Operasi implikasi

Pernyataan implikasi atau conditional statement atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “jika p maka q ” dinyatakan dengan $p \rightarrow q$ atau $p \supset q$, dimana p disebut “anteseden” dan q disebut konsekuen. Suatu pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekuennya salah, dalam kemungkinan yang lain pernyataan implikasi itu adalah benar. Tabel kebenaran untuk operasi implikasi adalah sebagai berikut.

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh:

p : Ani akan membawa buku gambar.

q : Ani akan membawa buku tulis.

$p \vee q$: Ani akan membawa buku gambar atau buku tulis.

4) Operasi biimplikasi

Pernyataan biimplikasi atau *biconditional statement* atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “ p jika dan hanya jika q ” dinyatakan dengan $p \leftrightarrow q$. Suatu pernyataan biimplikasi benar jika nilai kebenaran p sama dengan nilai kebenaran q . Tabel kebenaran untuk operasi biimplikasi adalah sebagai berikut:

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

p : 3 adalah bilangan ganjil.

q : 3 tidak habis dibagi dua.

$p \leftrightarrow q$: 3 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika 3 tidak habis dibagi 2.

d Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi

Perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

P	$\sim p$	$p \vee \sim p$
B	S	B
S	B	B

Apabila dilihat dari tabel tersebut, nilai kebenaran dari $p \vee \sim p$ semuanya bernilai benar. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya benar tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan **tautologi**.

Untuk lebih jelasnya Anda dapat membuktikan nilai kebenaran dari $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ memiliki nilai kebenaran semuanya benar. Pernyataan tersebut juga termasuk **tautologi**.

Sebaliknya pada saat kita menentukan nilai kebenaran dari $\sim[(\sim p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)] \wedge r$, nilai kebenaran pernyataan tersebut semuanya salah. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya salah tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan kontradiksi. Adapun kontingensi merupakan pernyataan yang nilai kebenarannya merupakan kumpulan dari benar dan salah di luar tautologi dan kontradiksi.

e Konvers, Invers, dan Kontraposisif

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \rightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \rightarrow q$ dinamakan implikasi logis.

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \leftrightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \leftrightarrow q$ dinamakan ekuivalen logis.

Perhatikan pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$) berikut ini.

Jika hari ini hujan maka saya berada di rumah.

Kemudian perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini.

- (a) Jika saya berada di rumah maka hari ini hujan. ($q \rightarrow p$)
- (b) Jika hari ini tidak hujan maka saya tidak berada di rumah.
($\sim p \rightarrow \sim q$)
- (c) Jika saya tidak berada di rumah maka hari ini tidak hujan.
($\sim q \rightarrow \sim p$)

Pernyataan (a) dinamakan konvers, pernyataan (b) dinamakan invers, dan pernyataan (c) dinamakan kontrapositif.

Dari pernyataan tersebut, diperoleh pernyataan-pernyataan yang saling ekuivalen (nilai kebenaran dari dua pernyataan tersebut sama), yaitu:

- (a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
- (b) $(q \rightarrow p) \equiv (\sim p \rightarrow \sim q)$

Contoh:

Tentukan konvers, invers, dan kontrapositif dari pernyataan berikut ini: Jika $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Penyelesaian:

Dari pernyataan tersebut:

p : $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

q : $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

$\sim p$: $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

$\sim q$: $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Konvers : Jika $a^2 > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Invers : Jika $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

Kontrapositif : Jika $a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$ maka $a \leq 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

f. Penarikan Kesimpulan

Argumen adalah serangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai ungkapan pernyataan penarikan kesimpulan. Argumen terdiri dari pernyataan-pernyataan yang terdiri dari dua kelompok, yaitu kelompok premis-premis dan kelompok konklusi.

Contoh:

(a) Jika Rahmi rajin belajar maka Rahmi akan siap menghadapi ujian.

(b) Rahmi tidak siap menghadapi ujian.

(c) Jadi, Rahmi tidak rajin belajar.

Pernyataan no (a) dan (b) dinamakan premis-premis, dan pernyataan no (c) dinamakan konklusi.

Dalam logika dikenal beberapa cara dalam pengambilan kesimpulan, yaitu sebagai berikut.

1) Modus Ponens

Modus ponens adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ atau $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$. Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ premis 1} \\ \hline p \quad \text{premis 2} \\ \hline \therefore q \quad \text{kesimpulan} \end{array}$$

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini:

(a) Jika hari ini hujan, maka Andi berada di rumah

(b) Jika Andi berada di rumah, maka Andi akan tidur

(c) Hari ini hujan Penyelesaian:

Dari pernyataan-pernyataan tersebut:

p : Hari ini hujan.

q : Andi berada di rumah.

r : Andi akan tidur

Dari pernyataan (a) dan (c) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika hari ini hujan maka Andi berada di rumah. (a)

$$\begin{array}{l} p \quad \text{Hari ini hujan. (c)} \\ \hline \therefore q \quad \text{Andi berada di rumah (d)} \end{array}$$

Pernyataan (d) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (b) belum kita gunakan. Dari pernyataan (b) dan (d) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Andi berada di rumah maka Andi akan tidur. (a)

q Andi berada di rumah. (c)

$\therefore r$ Andi akan tidur (e)

Pernyataan (e) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan. Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Andi akan tidur.

2) Modus Tolen

Modus Tolen adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ atau $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$. Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1

$\sim q$ premis 2

$\therefore \sim p$ kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini.

- (a) Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian.
- (b) Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah.
- (c) Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.
- (d) Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

p : Ani rajin belajar.

$\sim p$: Ani tidak rajin belajar.

q : Ani lulus ujian.

r : Ani diberi hadiah oleh Ayah.

$\sim r$: Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

s : Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

Dari pernyataan atau premis (b) dan (d) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah. (b)

$\sim r$ Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah. (d)

$\therefore \sim q$ Ani tidak lulus ujian (e)

Pernyataan (e) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (a) dan (c) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (a) dan (e) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian. (a)

$\sim q$ Ani tidak lulus ujian. (e)

$\therefore \sim p$ Ani tidak rajin belajar (f)

Pernyataan (f) masih belum merupakan hasil kesimpulan karena pernyataan atau premis (c) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (c) dan (f) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$\sim p \rightarrow s$ Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan. (c)

$\sim p$ Ani tidak rajin belajar. (f)

$\therefore s$ Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan (g)

Pernyataan (g) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan. Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

3) Silogisme

Silogisme adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ premis 1} \\ q \rightarrow r \text{ premis 2} \\ \hline \therefore p \rightarrow r \text{ kesimpulan} \end{array}$$

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari premis-premis di bawah ini:

- (a) Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya.
- (b) Jika Intan pergi ke Surabaya maka Intan menginap di rumah Sandra.
- (c) Jika Intan tidak bertemu Kiki maka Intan tidak menginap di rumah Sandra.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

- p : Pak Herman pergi ke Jakarta.
- q : Intan akan pergi ke Surabaya.
- r : Intan menginap di rumah Sandra.
- $\sim r$: Intan tidak menginap di rumah Sandra.
- $\sim s$: Intan tidak bertemu Kiki.

Dari pernyataan (a) dan (b) menggunakan silogisme diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya. (a)

$q \rightarrow r$ Jika Intan pergi ke Suranaya maka Intan menginap di rumah

Sandra. (b)

$\therefore p \rightarrow r$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra. (d)

Pernyataan (d) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara.

Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (c) belum kita gunakan.

Sekarang perhatikan premis (c) dan (d) yang berbentuk:

$$\sim s \rightarrow \sim r \text{ (c)}$$

$$p \rightarrow r \text{ (d)}$$

Kedua pernyataan tersebut tidak dapat kita gunakan dengan silogisme, maka kita harus merubah pernyataan (c) ke bentuk ekuivalennya. Bentuk ekuivalen dari pernyataan (c) adalah $r \rightarrow s$.

Pernyataan (d) dan bentuk ekuivalen pernyataan (c) menggunakan silogisme diperoleh:

$$p \rightarrow r \text{ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra. (d)}$$

$$r \rightarrow s \text{ Jika Intan menginap di rumah Sandra maka Intan bertemu Kiki. (a)}$$

$$\therefore p \rightarrow s \text{ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki. (e)}$$

Pernyataan (e) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan.

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki.

Selain tiga aturan penarikan kesimpulan di atas, ada beberapa aturan penarikan kesimpulan yang lain dengan menggunakan kata kunci “semua” ataupun “beberapa”. Aturan penarikan kesimpulan yang melibatkan kata kunci tersebut antara lain:

- (a) Semua A adalah B.
Semua C adalah A.
Jadi semua C adalah B.
- (b) Beberapa A adalah bukan B.
Semua A adalah C.
Jadi beberapa C adalah bukan B.
- (c) Semua A adalah B.
Beberapa C adalah bukan B.
Jadi, beberapa C adalah bukan A.
- (d) Semua A adalah B.
Beberapa C adalah A.

Jadi, beberapa C adalah B.

(e) Tak ada A yang merupakan B.

Semua A adalah C.

Jadi, beberapa C adalah bukan B.

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari:

(a) Semua segiempat adalah poligon.

Semua persegi panjang adalah segiempat.

Kesimpulan: Semua persegi panjang adalah polygon.

(b) Beberapa guru adalah bukan sarjana pendidikan.

Semua guru adalah pendidik.

Kesimpulan: Beberapa pendidik adalah bukan sarjana pendidikan.

Coba Anda cari contoh yang lain dan tentukan kesimpulannya.

2. Materi 2 Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

Sebelum membahas mengenai pola bilangan, terlebih dahulu akan dimulai dengan membahas sedikit mengenai penalaran. Dalam matematika, penalaran dibagi menjadi penalaran deduktif dan penalaran induktif.

a. Penalaran deduktif

Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum. Dasar penalaran deduktif adalah kebenaran suatu pernyataan haruslah berdasarkan pada kebenaran pernyataan lain.

Contoh:

Buktikanlah: Jika m dan n adalah bilangan-bilangan genap, maka $m + n$ adalah bilangan genap.

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, maka kita akan menggunakan proses berpikir deduktif. Artinya membuktikan pernyataan tersebut haruslah berdasarkan

kebenaran ataupun definisi yang sudah jelas kebenarannya, tanpa menggunakan contoh.

Misalkan m dan n adalah sebarang bilangan genap, terdapat r dan s sedemikian hingga $m = 2r$ dan $n = 2s$ (definisi bilangan genap).

$$m + n = 2 \times r + 2 \times s$$

$$m + n = 2 \times (r + s) \text{ (sifat distributif, sifat tertutup)}$$

Karena $r + s$ adalah suatu bilangan bulat, maka berdasarkan definisi bilangan genap diperoleh bahwa $m + n$ adalah bilangan genap.

b. Penalaran induktif

Penalaran induktif atau berpikir induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif pada prinsipnya adalah menyelesaikan persoalan matematika tanpa menggunakan rumus (dalil), melainkan dimulai dengan memperhatikan data/soal. Dari data tersebut diproses sehingga berbentuk kerangka/pola dasar tertentu yang kita cari sendiri, sedemikian rupa dapat ditarik sebuah kesimpulan.

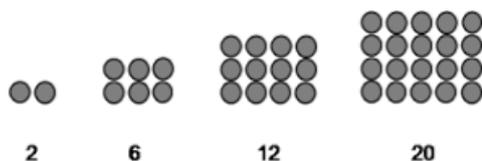
Penalaran induktif dapat meliputi pengenalan pola, dugaan, dan pembentukan generalisasi.

c. Pola Bilangan, Barisan dan Deret Bilangan

Berikut akan disajikan beberapa contoh pola bilangan, antara lain sebagai berikut.

1) Pola persegi panjang

Pola persegi panjang digambarkan dengan pola seperti berikut ini.



Modul Belajar Mandiri

Banyak titik pada pola persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, Untuk menentukan rumus suku ke- n dari banyak titik pada pola persegi panjang, maka Anda harus perhatikan pola suku ke- n pada titik-titik di atas.

Perhatikan tabel di bawah ini untuk membantu kita membuat dugaan rumus suku ke- n .

Suku ke- n	Banyak titik (vertikal)	Banyak titik (horizontal)	Banyak titik seluruhnya
1	1	2	2
2	2	3	6
3	3	12
4	20
n	n	$n + 1$	$n(n + 1)$

Rumus pola bilangan persegi panjang adalah:

$$U_n = n(n + 1), n \in \text{bilangan asli.}$$

Catatan: U_n = suku ke- n .

Contoh:

Tentukanlah banyak titik pola persegi panjang pada suku ke-15!

Penyelesaian:

Banyak titik pada suku ke-15 adalah U_{15} .

$$U_n = n(n + 1)$$

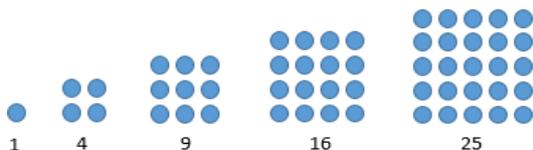
$$U_{15} = 15(15 + 1)$$

$$U_{15} = 240.$$

Jadi banyak titik pada suku ke-15 adalah 240.

2) Pola persegi

Pola persegi digambarkan dengan pola seperti berikut ini.



Pola bilangan persegi terdiri dari 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,

Melalui proses yang sama seperti menemukan dugaan rumus pola persegi panjang, coba Anda lakukan proses menemukan pola dugaan untuk pola persegi! Apakah rumus yang Anda peroleh adalah n^2 ?

Rumus pola bilangan persegi adalah $U_n = n^2$, $n \in \text{bilangan asli}$.

Catatan: $U_n =$ suku ke- n .

3) Pola segitiga

Pola segitiga digambarkan sebagai berikut.

Pola bilangan segitiga terdiri dari 1, 3, 6, 10, 15,

Setelah memperhatikan bilangan yang termasuk pada pola bilangan segitiga, dapatkan Anda membuat dugaan rumus pola bilangan segitiga melalui pola bilangan persegi panjang? Jika Anda belum menemukannya, maka lakukan langkah seperti menemukan rumus persegi panjang yang telah dicontohkan pada bagian 1). Apakah rumus yang Anda peroleh adalah $U_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Rumus pola bilangan segitiga adalah:

$$U_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad n \in \text{bilangan asli}$$

Catatan: $U_n =$ suku ke- n

4) Pola bilangan Fibonacci

Pola bilangan Fibonacci ditemukan oleh matematikawan Italia yang bernama Leonardo da Pisa. Perhatikan contoh pola bilangan Fibonacci berikut ini: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, Informasi apa yang dapat Anda peroleh dari bilangan-bilangan tersebut? Informasi yang Anda peroleh dari barisan bilangan tersebut adalah suku ke-3 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-1 dan suku ke-2, suku ke-4 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-2 dan suku ke-3, dan seterusnya. Dengan kata lain pada pola bilangan Fibonacci sebuah suku tertentu merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya, dapat ditulis dengan:

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

Catatan: $U_n =$ suku ke- n .

Dapatkan Anda membuat bilangan-bilangan yang mengikuti pola bilangan Fibonacci?

5) Barisan dan Deret Aritmatika

Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini:

(a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,

(b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,

(c) 11, 14, 17, 20, 23,

(d) 58, 54, 50, 46, 42, 38,

Apabila kita perhatikan, pada barisan-barisan tersebut, selisih dua buah bilangan pada setiap barisan adalah tetap (coba Anda identifikasi hal ini!). Barisan yang memiliki karakteristik seperti ini dinamakan **barisan aritmatika**. Selisih antara dua suku pada barisan aritmatika dinamakan **beda** (b).

Sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika jika untuk setiap n berlaku $U_n - U_{n-1} = b$, b adalah sebuah konstanta. Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.

Misalkan kita memiliki suku pertama dari sebuah barisan aritmatika adalah a dan bedanya adalah b , maka akan diperoleh:

$$U_1 = a$$

$$U_2 - U_1 = b \leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b,$$

dan seterusnya, sehingga suku-suku barisan aritmatika dapat disusun sebagai berikut: $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$

U_1	U_2	U_3	U_4	...	U_n
a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$...	$a + (n - 1)b$

Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b,$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n

a = suku pertama

b = beda

Perhatikan penjumlahan bilangan-bilangan berikut ini:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Berapakah hasil penjumlahan bilangan-bilangan tersebut?

Kita dapat melakukannya seperti salah satu matematikawan Carl Frederich Gauss (1777 – 1855), dengan cara berikut ini:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 &= S_{100} \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 &= S_{100} \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 &= 2 \times S_{100} \\ 100 \times 101 &= 2 \times S_{100} \\ S_{100} &= \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \end{aligned}$$

Bentuk $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$ adalah suatu contoh deret aritmatika. Deret aritmatika adalah jumlah suku-suku barisan aritmatika, dapat ditulis dengan:

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan aritmatika.

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n, \text{ atau} \\ S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b]. \end{aligned}$$

Menemukan rumus umum jumlah suku ke- n adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b] \\ S_n &= [a + (n - 1)b] + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \\ \hline 2S_n &= [2a + (n - 1)b] + \dots + [2a + (n - 1)b] \\ 2S_n &= n[2a + (n - 1)b] \\ S_n &= \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b] \\ S_n &= \frac{1}{2} n(a + U_n) \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukanlah jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6!

Penyelesaian:

Sebelum menentukan jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6, maka kita akan menentukan terlebih dahulu bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6.

Bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6 adalah:

$$204, 210, 216, \dots, 294.$$

Berdasarkan barisan tersebut:

$$a = 204$$

$$b = 6$$

$$U_n = 294$$

Sebelum menentukan jumlah, maka tentukan terlebih dahulu banyak suku pada barisan tersebut atau kita akan mencari n .

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$294 = 204 + (n - 1)6$$

$$90 = (n - 1)6$$

$$(n - 1) = 15$$

$$n = 16$$

Jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6,

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_{16} = \frac{1}{2} \times 16 (204 + 294)$$

$$S_{16} = 8 \times 498$$

$$S_{16} = 3984.$$

Jadi jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6 adalah 3.984.

6) Barisan dan Deret Geometri

Perhatikan beberapa pola barisan berikut ini:

(a) 1, 2, 4, 8, 16,

(b) 64, -16, 4, -1,

(c) 5, -15, 45, -225,

Jika kita amati, barisan bilangan tersebut tidak memiliki selisih yang tetap seperti pada barisan aritmatika. Barisan-barisan tersebut memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang tetap (coba Anda buktikan!). Barisan yang memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap maka dinamakan barisan geometri. Konstanta hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang selalu tetap dinamakan rasio (r).

Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.

Misalkan kita memiliki sebuah barisan geometri dengan:

$U_1 = a$, rasio = r , maka akan kita dapatkan:

$$\frac{U_2}{U_1} = r \leftrightarrow U_2 = U_1 \times r = a \times r = ar$$

$$\frac{U_3}{U_2} = r \leftrightarrow U_3 = U_2 \times r = ar \times r = ar^2$$

$$\frac{U_4}{U_3} = r \leftrightarrow U_4 = U_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$$

dan seterusnya, sehingga pola umum dari barisan geometri adalah:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Dari pola tersebut maka $U_n = a \times r^{n-1}$.

Setelah mengetahui rumus suku ke- n pada barisan geometri, sekarang bagaimana dengan penjumlahan suku-suku pada barisan geometri atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \dots$$

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan geometri.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r \times S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n -$$

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}, r > 1$$

Contoh:

Seutas tali dipotong menjadi 7 bagian dengan ukuran panjangnya membentuk deret geometri. Jika panjang bagian tali yang terpendek adalah 3 cm dan panjang bagian tali terpanjang adalah 192 cm, maka panjang tali seluruhnya adalah

Penyelesaian:

$$a = 3, U_n = 192, n = 7.$$

Dari permasalahan tersebut yang belum diketahui adalah rasio, maka sebelum kita menghitung jumlah panjang tali seluruhnya, kita akan menentukan ratio terlebih dahulu.

$$U_n = a \times r^{n-1}$$

$$192 = 3 \times r^{7-1}$$

$$r^6 = 64$$

$r = 2$, karena $r > 1$, maka:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{3(128 - 1)}{1} = 381$$

Jadi, panjang tali seluruhnya adalah 381 cm.

3. Materi 3 Persamaan Linear, Pertidaksamaan Linear, dan Grafik Fungsi Linear

Persamaan merupakan pernyataan matematika yang terdiri dari dua buah yang dipisahkan dengan tanda “=”. Persamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”. Penyelesaian dari suatu persamaan merupakan sebarang bilangan yang membuat nilai persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan (digantikan) pada variabel. Persamaan linear yang akan dibahas adalah persamaan linear satu variabel dan persamaan linear dua variabel.

a Persamaan linear satu variabel

Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah:

$$ax + b = c, a \neq 0.$$

Contoh:

Tentukan nilai x dari persamaan berikut ini:

$$1) \quad 5x - 4 = 26$$

$$\leftrightarrow 5x - 4 = 26$$

$$\leftrightarrow 5x - 4 + 4 = 26 + 4$$

$$\leftrightarrow 5x = 30$$

$$\leftrightarrow x = 6$$

2) $3(x-4) = 7(x+2) - 5x$

$$\leftrightarrow 3(x-4) = 7(x+2) - 5x$$

$$\leftrightarrow 3x - 12 = 7x + 14 - 5x$$

$$\leftrightarrow 3x - 12 = 2x + 14$$

$$\leftrightarrow 3x - 12 + 12 = 2x + 14 + 12$$

$$\leftrightarrow 3x - 2x = 2x - 2x + 26$$

$$\leftrightarrow x = 26$$

3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{4} = 12$

$$\leftrightarrow \frac{x(4)}{3(4)} + \frac{2x(3)}{4(3)} = 12$$

$$\leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{6x}{12} = 12$$

$$\leftrightarrow \frac{10x}{12} = 12$$

$$\leftrightarrow \frac{10x}{12} = 12$$

$$\leftrightarrow 10x = 144$$

$$\leftrightarrow x = 14,4$$

b. Persamaan linear dua variabel

Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah:

$$ax + by = c, \text{ dengan } a \text{ dan } b \neq 0.$$

Contoh:

1) Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$6x + 2y = 8$$

$$5x - y = 12$$

Penyelesaian:

a) Cara eliminasi:

Menentukan nilai x

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12 \text{ (kalikan dengan 2)}$$

Persamaan (2) menjadi $10x - 2y = 24$

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 10x - 2y = 24 +$$

$$16x = 32 \leftrightarrow x = 2$$

Menentukan nilai y

$$(1) 6x + 2y = 8 \text{ (kalikan dengan 5)}$$

$$(2) 5x - y = 12 \text{ (kalikan dengan 6)}$$

Persamaannya menjadi:

$$(1) 30x + 10y = 40$$

$$(2) 30x - 6y = 72 -$$

$$16y = -32 \leftrightarrow y = -2$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

b) Cara substitusi

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12$$

Persamaan (2) menjadi $-y = 12 - 5x$ atau $y = 5x - 12$.

Persamaan (1) $6x + 2y = 8$

$$6x + 2(5x - 12) = 8$$

$$6x + 10x - 24 = 8$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

$$y = 5x - 12$$

$$y = 5(2) - 12$$

$$y = -2$$

c) Cara gabungan eliminasi dan substitusi

Menentukan nilai x

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12 \quad (\text{kalikan dengan } 2)$$

Persamaan (2) menjadi $10x - 2y = 24$

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 10x - 2y = 24 \quad +$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

$$5x - y = 12$$

$$5(2) - y = 12$$

$$y = -2$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

- 2) Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah ... tahun.

Penyelesaian:

Misalkan umur ayah = a , umur Budi = b

Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan umur Budi:

$$(a - 7) = 6(b - 7)$$

$$(a - 7) = 6b - 42$$

$$a - 7 = 6b - 42$$

$$a = 6b - 35$$

Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9.

$$2(a + 4) = 5(b + 4) + 9$$

$$2a + 8 = 5b + 29$$

$$2a = 5b + 21$$

(dari persamaan sebelumnya $a = 6b - 35$)

$$2(6b - 35) = 5b + 21$$

$$12b - 70 = 5b + 21$$

$$7b = 91$$

$$b = 13$$

$$a = 6b - 35$$

$$a = 6(13) - 35$$

$$a = 43$$

Jadi, umur ayah sekarang adalah 43 tahun.

- 3) Harga 7 buah pulpen dan 3 buah penghapus adalah Rp11.150, sedangkan harga 5 buah pulpen dan 5 buah penghapus adalah Rp10.250. Berapakah harga 8 buah pulpen dan 7 buah penghapus?

Penyelesaian:

Misalkan harga pulpen = x , harga penghapus = y

Bentuk matematika menjadi:

$$7x + 3y = 11.150$$

$$5x + 5y = 10.250$$

Dengan menggunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi, diperoleh nilai $x = \text{Rp}1.250$ dan $y = \text{Rp}800$ (coba Anda buktikan!).

Harga 8 pulpen dan 7 penghapus adalah Rp15.600.

c. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel dengan derajat tertingginya satu dan dihubungkan dengan tanda " \neq ", " $<$ ", " $>$ ", " \leq ", atau " \geq ".

Catatan:

Prinsip yang digunakan: jika kedua ruas dikalikan/dibagi dengan bilangan negatif, maka tanda pertidaksamaan harus dirubah, misalnya dari $<$ atau \leq menjadi $>$ atau \geq ataupun sebaliknya.

Contoh:

- 1) Tentukan himpunan penyelesaian dari: a. $4x + 10 > 26$

$$4x + 10 > 26 - 10$$

$$\leftrightarrow 4x - 10 + 10 > 16$$

$$\leftrightarrow 4x > 16$$

$$\leftrightarrow x > 4$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > 4, x \in \mathbb{R}\}$.

$$2) \quad 2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$$

$$2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 7x + 14 - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 3x + 14$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 + 8 < 3x + 14 + 8$$

$$\leftrightarrow 2x - 3x < 3x - 3x + 26$$

$$\leftrightarrow -x < 26$$

$$\leftrightarrow x > -26$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > -26, x \in \mathbb{R}\}$.

d Grafik Fungsi Linear

Sebuah fungsi linear $y = f(x)$ dapat kita gambarkan grafik fungsi linearnya. Untuk menggambar grafik suatu fungsi terlebih dahulu dicari pasangan-pasangan terurut dari fungsi itu, kemudian menggambar pasangan itu sebagai titik pada suatu sistem koordinat lalu menghubungkan titik-titik tersebut.

Grafik fungsi linear yang memiliki kemiringan garis (gradien) m dan melewati titik $A(x_1, y_1)$, persamaan garisnya adalah:

$$(y - y_1) = m(x - x_1).$$

Misalkan terdapat suatu grafik fungsi linear yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ atau merupakan bentuk lain dari } (y - y_1) = m(x - x_1)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis g yang melalui titik $(1,2)$ dan $(3,4)$!

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

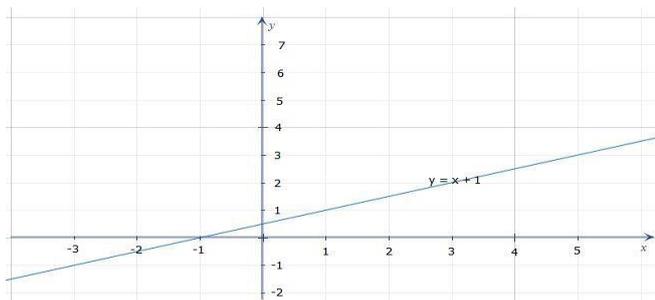
$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{3 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{2}$$

$$2(y - 2) = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$y = x + 1$$



Apabila terdapat dua buah garis, maka kedua garis tersebut mungkin akan berpotongan di satu titik (pada bahasan ini yang akan dibahas adalah dua garis yang saling tegak lurus) atau mungkin juga tidak berpotongan (yang selanjutnya dinamakan garis sejajar). Hubungan antara dua garis atau grafik fungsi linear:

1) Dua garis sejajar

Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, ditulis dengan $m_1 = m_2$. Dengan kata lain dua garis dikatakan sejajar apabila dua garis tersebut tidak memiliki titik potong. Ilustrasi paling sederhana dari dua garis sejajar adalah rek kereta api.

Contoh:

Tentukan persamaan garis l yang melalui titik $(-3,5)$ dan sejajar dengan garis g melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis g .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leftrightarrow m = \frac{4 - (-2)}{8 - 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis l .

Karena gradien dua garis yang sejajar adalah sama, $m_1 = m_2 = -1$

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{3}{2} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 2 (y - 5) = 3 (x + 3)$$

$$\leftrightarrow 2y - 10 = 3x + 9$$

$$\leftrightarrow 2y = 3x + 19$$

$$\leftrightarrow y = \frac{3x + 19}{2}$$

2) Dua garis saling tegak lurus

Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1 atau dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh:

Tentukan persamaan garis k yang melalui titik $(-3,5)$ dan tegak lurus dengan garis h yang melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis h

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{8 - 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis k

Karena gradien dua garis yang tegak lurus adalah $m_1 \cdot m_2 = -1$, sehingga $m_2 = -\frac{2}{3}$

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$\leftrightarrow (y - 5) = -\frac{2}{3} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 3 (y - 5) = -2 (x + 3)$$

$$\leftrightarrow 3y - 15 = -2x - 6$$

$$\leftrightarrow 3y = -2x + 9$$

$$\leftrightarrow y = \frac{-2x + 9}{3}$$

4. Materi 4 Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat, dan Grafik Fungsi Kuadrat

Pada materi 4 akan dibahas tentang persamaan kuadrat dan pertidaksamaan Kuadrat

a Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian atau akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 dari persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan memfaktorkan, melengkapkan bentuk kuadrat, menggunakan rumus kuadratis, dan menggambar grafik fungsi kuadrat.

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $x^2 - 3x - 18 = 0$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, perhatikan cara-cara berikut ini:

1) Memfaktorkan

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\leftrightarrow (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\leftrightarrow x = 6 \text{ atau } x = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

2) Melengkapkan kuadrat

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 3x = 18$$

$$\leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ kedua ruas ditambahkan dengan } \left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{81}{4} \\ \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} &= \pm \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \\ x_1 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} &\quad \text{atau} \quad x_2 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \\ x_1 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} &\quad x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ x_1 = \frac{12}{2} = 6 &\quad x_1 = -\frac{6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

3) Rumus kuadratis

Dari persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 18 = 0$, maka:

$a = 1$, $b = -3$, dan $c = -18$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{9+72}}{2} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} \\ x_2 = \frac{3-9}{2} &\quad \text{atau} \quad x_1 = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

b. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda \neq , atau " $<$ ", atau " $>$ ", atau " \leq ", atau " \geq ".

Contoh:

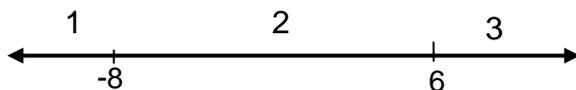
Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 2x - 48 < 0$.

Penyelesaian:

Langkah awal, ubahlah pertidaksamaan tersebut menjadi sebuah persamaan, sehingga menjadi $x^2 + 2x - 48 = 0$.

Dengan menggunakan pemfaktoran, diperoleh $x_1 = -8$ atau $x_2 = 6$ (*coba Anda buktikan menggunakan salah satu cara seperti sebelumnya!*)

Untuk menentukan daerah hasilnya, kita akan menggunakan bantuan garis bilangan, seperti pada gambar berikut ini:



Berdasarkan gambar di atas, pada garis bilangan dibagi menjadi 3 daerah, yaitu daerah 1, daerah 2, dan daerah 3. Untuk memudahkan kita akan coba mengambil $x = 0$, yang berada pada daerah 2 (*mengapa?*) yang kemudian kita substitusikan ke: $x^2 + 2x - 48 = 0^2 + 2(0) - 48 = -48$, hasilnya adalah bilangan negatif, artinya pada daerah $x^2 + 2x - 48 < 0$. Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x | -8 < x < 6, x \in \mathbb{R}\}$.

Akar-akar persamaan kuadrat memungkinkan bilangan real atau mungkin juga bilangan imajiner. Hal tersebut ditentukan oleh nilai D atau diskriminan. Dengan melihat nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$), jenis-jenis akar persamaan kuadrat dibagi tiga, yaitu:

- 1) Jika $D > 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan berbeda.
- 2) Jika $D = 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan kembar (sama).
- 3) Jika $D < 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan kompleks dan berbeda.

Contoh:

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:

1) $x^2 - 3x - 18 = 0$

Penyelesaian:

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (-18)$$

$$D = 9 + 72$$

$$D = 81$$

Karena $D > 0$ maka kedua akar persamaan kuadrat tersebut merupakan bilangan real dan berbeda (terbukti pada contoh sebelumnya).

$$2) \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

Penyelesaian:

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \times (1) \times (25)$$

$$D = 100 - 100$$

$$D = 0$$

Karena $D = 0$ maka, kedua akar persamaan kuadrat tersebut real dan kembar (coba Anda buktikan berapa nilai akar persamaan kuadrat tersebut!).

Bagaimana jika kita diminta menentukan bentuk persamaan kuadrat yang akar-akar persamaan kuadrat tersebut diketahui? Perhatikan contoh berikut ini.

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah 6 dan -4!

Karena akarnya adalah 6 dan -4, maka dapat kita tuliskan

$$(x - 6)(x - (-4)) = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 6x + 4x - 24 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

Secara umum, bentuk tersebut dapat ditulis:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Ingat kembali rumus kuadratis yang telah dipelajari sebelumnya, yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dapat dijabarkan:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{maka:}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Modul Belajar Mandiri

$$\begin{aligned}x_1 \times x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x_1 \times x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x_1 \times x_2 &= \frac{(-b)^2 + (-b)(-\sqrt{b^2 - 4ac}) + (\sqrt{b^2 - 4ac})(-b) - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} \\x_1 \times x_2 &= \frac{(-b)^2 + (-b)(\sqrt{b^2 - 4ac}) + (-b)(\sqrt{b^2 - 4ac}) - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} \\x_1 \times x_2 &= \frac{(-b)^2 + (-)(b)^2 - 4ac}{4a^2} \\x_1 \times x_2 &= \frac{(b)^2 + -(b^2) + 4ac}{4a^2} \\x_1 \times x_2 &= \frac{4ac}{4a^2} \\x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Menentukan persamaan kuadrat dapat digunakan rumus:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Contoh:

Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$ adalah a dan b . Tentukanlah persamaan kuadrat baru yang akarnya $2a$ dan $2b$!

Dari persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 1 = 0$, diperoleh:

$$a + b = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{3}$$

$$a \times b = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru:

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a + b) = 2 \times \frac{-2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$x_1 \times x_2 = 2a \times 2b = 4 \times a \times b = 4 \times \frac{-1}{3} = \frac{-4}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4}{3}\right)x + \frac{-4}{3} = 0$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

c. Grafik Fungsi Kuadrat

Setelah mempelajari tentang akar-akar persamaan kuadrat, maka selanjutnya akan dibahas mengenai grafik fungsi kuadrat.

Berikut langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat

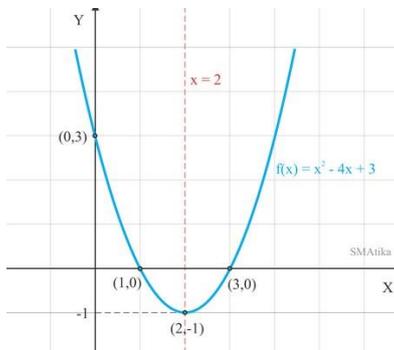
$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

- 1) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y . Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$, dan titik potong dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0$.
- 2) Menentukan persamaan sumbu simetri, garis $x = -\frac{b}{2a}$
- 3) Menentukan koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Misalkan gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$! Langkah yang akan kita lakukan adalah sebagai berikut.

- 1) Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y .
Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x - 3)(x - 1) = 0$
 $x = 3$ atau $x = 1$
Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah $(1,0)$ dan $(3,0)$. Titik potong dengan sumbu y , diperoleh jika $x = 0$.
 $f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$
Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah $(0,3)$
- 2) Persamaan sumbu simetri.
Persamaan sumbu simetri $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ adalah garis $x = -\frac{b}{2a}$
sumbu simetri pada $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah:
 $= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{(2)(1)} = 2$
- 3) Menentukan koordinat titik balik.
Karena sumbu simetri $x = 2$, maka $f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$
koordinat titik balik $(2, -1)$.

Diperoleh sketsa grafik sebagai berikut:



Berdasarkan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, dan nilai a , maka secara geometris akan terdapat 6 kemungkinan bentuk grafik fungsi, yaitu:

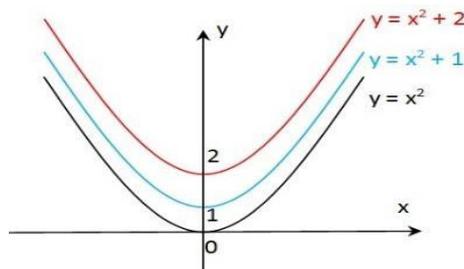
$D > 0$ dan $a > 0$	$D = 0$ dan $a > 0$	$D < 0$ dan $a > 0$
$D > 0$ dan $a < 0$	$D = 0$ dan $a < 0$	$D < 0$ dan $a < 0$

4) Pergeseran Grafik Fungsi Kuadrat

Sebuah grafik fungsi kuadrat, akan dapat digeser searah sumbu X ataupun searah sumbu Y . Misalkan terdapat sebuah grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$, akan digeser sejauh m ke arah kanan, dan n satuan ke arah atas.

Persamaan kuadrat itu akan menjadi: $y - n = f(x - m)$ *)

Perhatikan grafik fungsi di bawah ini. Grafik fungsi tersebut menggambarkan: $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, dan $y = x^2 + 2$.



Pertama perhatikan grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah atas, maka berdasarkan *) menjadi

$$y - 1 = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2 + 2$$

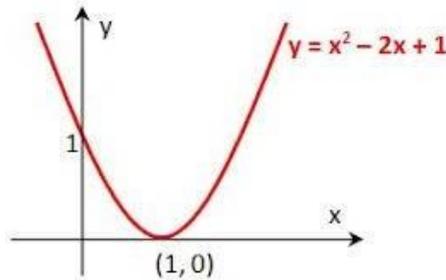
Untuk selanjutnya akan dicek juga grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah bawah atau dapat ditulis digeser -1, maka grafik fungsinya akan menjadi:

$$y - (-1) = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2$$

Perhatikan contoh selanjutnya. Lihat kembali grafik fungsi $y = x^2$ pada gambar sebelumnya. Grafik fungsi $y = x^2$ akan digeser satu satuan ke arah kanan. Persamaan kuadrat akan menjadi:

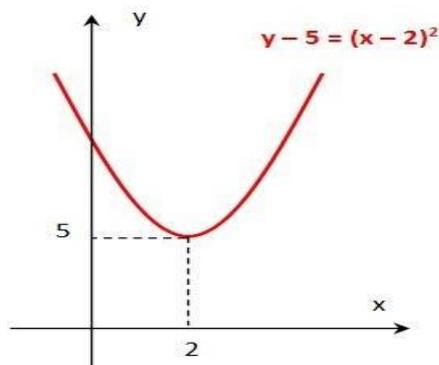
$$y - n = f(x - m),$$

$m = 1$ (karena satu satuan ke arah kanan), dan $n = 0$ (karena tidak bergeser ke arah atas atau bawah), maka persamaan kuadrat akan menjadi: $y = (x - 1)^2$ atau $y = x^2 - 2x + 1$.



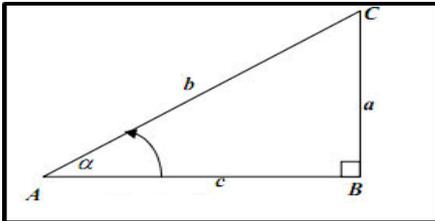
Contoh selanjutnya adalah jika fungsi kuadrat $y = x^2$ digeser 2 satuan ke kanan dan 5 satuan ke arah atas, maka akan menjadi:

$$y - 5 = (x - 2)^2, \text{ mengapa?}$$



5. Materi 5 Trigonometri

Perhatikan segitiga siku-siku berikut ini:



Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan sisi-sisi dengan aturan tertentu. Perbandingan tersebut dikenal dengan perbandingan trigonometri.

Pada bahasan ini akan dibahas tiga perbandingan trigonometri yaitu *sinus* (*sin*), *cosinus* (*cos*), dan *tangen* (*tan*). Pada gambar segitiga tersebut perhatikan bahwa sisi *b* disebut sebagai sisi miring, sisi *a* disebut sebagai sisi depan karena berada di depan sudut α , dan sisi *c* disebut sebagai sisi samping karena berada di samping sudut α . Berdasarkan gambar segitiga siku-siku tersebut maka berlaku perbandingan trigonometri sebagai berikut.

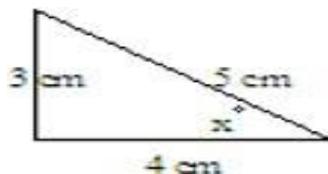
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c}$$

Contoh:

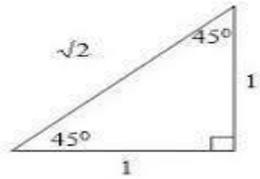
Perhatikan gambar di bawah ini! Tentukan $\sin x$, $\cos x$, dan $\tan x$!



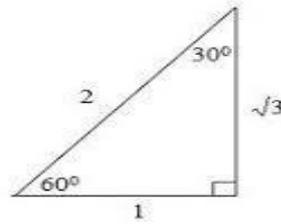
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0,75$$



Gambar (1)



Gambar (2)

Perhatikan dua segitiga siku-siku istimewa berikut ini:

Gambar (1) adalah gambar segitiga siku-siku sama kaki dengan besar dua sudut selain sudut siku-siku masing-masing adalah 45^0 . Gambar (2) adalah gambar segitiga siku-siku dengan besar sudut selain sudut siku-siku adalah 30^0 dan 60^0 . Berdasarkan Gambar (1) dan Gambar (2) kita akan menentukan nilai $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$, untuk besar nilai α adalah 30^0 , 45^0 , dan 60^0 .

Perhatikan Gambar (1):

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{1} = 1$$

Perhatikan gambar (2):

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Modul Belajar Mandiri

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Hasil perhitungan di atas dirangkum pada Tabel berikut ini:

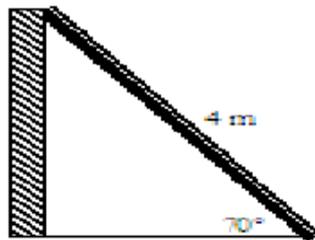
	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{3} \sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$	Tak terhingga

Contoh:

Sebuah tangga yang panjangnya 4 meter bersandar pada sebuah tembok. Tangga tersebut membentuk sudut 70° dengan lantai. Jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah ... meter.

Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan tersebut, dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Misalkan x adalah jarak ujung bawah tangga dengan lantai, maka:

$$\cos 70^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \quad (\text{mengapa kita menentukan cosinus?})$$

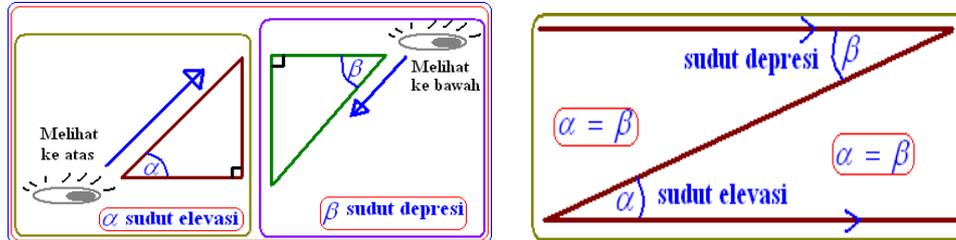
$$0,342 = \frac{x}{4} \quad (\cos 70^\circ = 0,342)$$

$$x = 1,368 \text{ m}$$

Jadi jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah 1,368 meter. (Catatan: menentukan nilai sin, cos, tan dapat menggunakan bantuan kalkulator)

Memandang sebuah objek dari suatu titik tertentu bergantung dengan sudut

elevasi ataupun sudut depresi. Gambar berikut ini adalah ilustrasi perbedaan sudut elevasi dan sudut depresi.

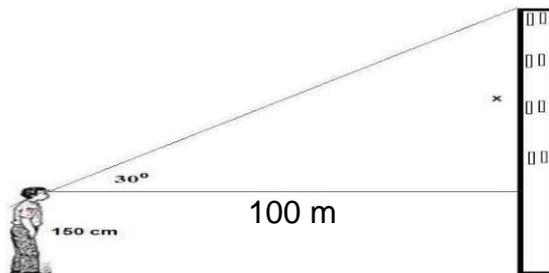


Dengan kata lain, sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.

Contoh:

Anton berdiri menghadap sebuah gedung dengan jarak 100 m. Anton ingin mengukur tinggi gedung tersebut dengan menggunakan klinometer dan Anton memandang puncak gedung dengan sudut elevasi sebesar 30° . Apabila tinggi Anton adalah 150 cm, maka tinggi gedung yang diukur Anton adalah ... m.

Penyelesaian:



Perhatikan ilustrasi berikut ini:

Untuk menentukan tinggi gedung, maka terlebih dahulu kita akan menentukan nilai x terlebih dahulu. Nilai x dapat ditentukan dengan mencari $\tan 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{x}{100}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{x}{100}$$

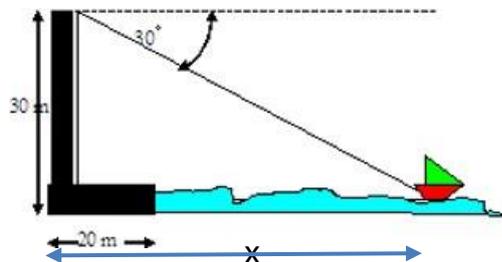
$$x = 100 \times \frac{1}{3}\sqrt{3} = 57,73 \text{ meter}$$

Tinggi gedung = 57,73 meter + 1,5 meter = 59,23 meter

Contoh:

Seorang petugas pelabuhan mengamati sebuah kapal dari menara pelabuhan dengan sudut depresi 30° terhadap horizontal. Jika tinggi menara 30 meter, dan menara terletak 20 meter dari bibir pantai. Berapakah jarak kapal dari bibir pantai?

Penyelesaian:



Perhatikan gambar tersebut! Pada gambar tersebut tampak bahwa tinggi Menara adalah sisi depan, dan jarak kapal dengan menara adalah 20 meter. Misal jarak kapal terhadap menara pengamat adalah x meter.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{30}{0,577} = 51,993$$

Karena x adalah jarak kapal dengan menara pengamat, maka jarak kapal ke bibir pantai adalah $51,993 - 20 = 31,993$ meter.

D. Rangkuman

1. Logika Matematika.

- a. Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran “benar” atau “salah”, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan.
- b. Operasi uner yaitu operasi negasi atau ingkaran, dimana nilai kebenaran negasi sebuah pernyataannya kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataan semula.
- c. Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur, yaitu meliputi operasi konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.
- d. Tautologi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya benar tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.
- e. Kontradiksi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya salah tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.
- f. Kontingensi adalah pernyataan yang bukan merupakan tautologi dan kontongensi.
- g. Pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$), memiliki hubungan konvers ($q \rightarrow p$), invers ($\sim p \rightarrow \sim q$), dan kontrapositif ($\sim q \rightarrow \sim p$).
- h. Aturan penarikan kesimpulan antara lain: modus ponens, modus tolens, dan silogisme.

2. Pola Bilangan dan Deret Bilangan.

- a. Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum.
- b. Penalaran induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif meliputi pola, dugaan dan pembentukan generalisasi.

- c. Rumus pola persegi panjang adalah $U_n = n(n + 1)$, Rumus pola bilangan persegi adalah $U_n = n^2$, Rumus pola bilangan segitiga adalah $U_n = n(n + 1)$.
- d. Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.
- e. Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $U_n = a + (n - 1)b$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n)$
- f. Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.
- g. Rumus suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $U_n = a \times r^{n-1}$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{r-1}$, $r \neq 1$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r > 1$.

3. Persamaan linear, Pertidaksamaan Linear dan Grafik Fungsi Linear.

- a. Persamaan linier adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”.
- b. Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah: $ax + b = c$, $a \neq 0$.
- c. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah: $ax + by = c$, dengan a dan $b \neq 0$.
- d. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear dua variabel dapat menggunakan metode eliminasi atau metode substitusi.
- e. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “ \neq ”, atau “ $<$ ”, atau “ $>$ ”, atau “ \leq ”, atau “ \geq ”.
- f. Persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah: $y - y_1 = m(x - x_1)$

- g. Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- h. Misalkan terdapat suatu garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- i. Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, dapat ditulis $m_1 = m_2$.
- j. Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1, dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4. Persamaan kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat dan Grafik Fungsi Kuadrat.

- a. Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”.
- b. Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “<”, “>”, “≤”, atau “≥”.
- c. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara pefaktoran, melengkapkan kuadrat, ataupun rumus kuadratis.
- d. Menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan cara menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y , menentukan persamaan sumbu simetri dan menentukan koordinat titik balik.

5. Trigonometri

- a. Perbandingan trigonometri merupakan perbandingan yang berlaku pada segitiga siku-siku. Perbandingan trigonometri yang dikenal antara lain:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c} \quad \text{atau} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- b. sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.

Penutup

Modul belajar mandiri yang telah dikembangkan diharapkan dapat menjadi referensi bagi Anda dalam mengembangkan dan me-*refresh* pengetahuan dan keletarampilan. Selanjutnya, Anda dapat menggunakan modul belajar mandiri sebagai salah satu bahan belajar mandiri untuk menghadapi seleksi Guru P3K.

Anda perlu memahami substansi materi dalam modul dengan baik. Oleh karena itu, modul perlu dipelajari dan dikaji lebih lanjut bersama rekan sejawat baik dalam komunitas pembelajaran secara daring maupun komunitas praktisi (Gugus, KKG, MGMP) masing-masing. Kajian semua substansi materi yang disajikan perlu dilakukan, sehingga Anda mendapatkan gambaran teknis mengenai rincian materi substansi. Selain itu, Anda juga diharapkan dapat mengantisipasi kesulitan-kesulitan dalam materi substansi yang mungkin akan dihadapi saat proses seleksi Guru P3K.

Pembelajaran-pembelajaran yang disajikan dalam setiap modul merupakan gambaran substansi materi yang digunakan mencapai masing-masing kompetensi Guru sesuai dengan indikator yang dikembangkan oleh tim penulis/kurator. Selanjutnya Anda perlu mencari bahan belajar lainnya untuk memperkaya pengetahuan dan keterampilan sesuai dengan bidang studinya masing-masing, sehingga memberikan tingkat pengetahuan dan keterampilan yang komprehensif. Selain itu, Anda masih perlu mengembangkan pengetahuan dan keterampilan Anda dengan cara mencoba menjawab latihan-latihan soal tes yang disajikan dalam setiap pembelajaran pada portal komunitas pembelajaran.

Dalam melaksanakan kegiatan belajar mandiri Anda dapat menyesuaikan waktu dan tempat sesuai dengan lingkungan masing-masing (sesuai kondisi demografi). Harapan dari penulis/kurator, Anda dapat mempelajari substansi materi bidang studi pada setiap pembelajaran yang disajikan dalam modul untuk mengembangkan pengetahuan dan keterampilan sehingga siap melaksanakan seleksi Guru P3K.

Selama mengimplementasikan modul ini perlu terus dilakukan refleksi, evaluasi, keberhasilan serta permasalahan. Permasalahan-permasalahan yang ditemukan

dapat langsung didiskusikan dengan rekan sejawat dalam komunitas pembelajarannya masing-masing agar segera menemukan solusinya.

Capaian yang diharapkan dari penggunaan modul ini adalah terselenggaranya pembelajaran bidang studi yang optimal sehingga berdampak langsung terhadap hasil capaian seleksi Guru P3K.

Kami menyadari bahwa modul yang dikembangkan masih jauh dari kesempurnaan. Saran, masukan, dan usulan penyempurnaan dapat disampaikan kepada tim penulis/kurator melalui surat elektronik (e-mail) sangat kami harapkan dalam upaya perbaikan dan pengembangan modul-modul lainnya.

Daftar Pustaka

- Agus Dwi Wibawa. (2019). *FPB dan KPK*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Guru Pendidikan Dasar Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Bennet, A., Burton, L., Nelson, L. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Mc Graw Hill.
- Choirul Listiani. (2019). *Operasi Hitung Bilangan Bulat*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Guru Pendidikan Dasar Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Fitriani, A. D. (2009). *Geometri (Modul PPG)*. Tidak diterbitkan.
- Musser, G., Burger, W., Peterson, B. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*. New York: John Willey & Sons.
- Prabawanto, S, Tiurlina, Nuraeni, E. (2008). *Pendidikan Matematika II*. Bandung: UPI Press.
- Russeffendi. (1998). *Statistika Dasar untuk Penelitian*. Bandung: IKIP Bandung Press.
- Russeffendi. (2006). *Pengantar kepada Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Rumiati. (2019). *Geometri Datar*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Guru Pendidikan Dasar Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
- Sobel, Max., Maletsky, Evan . (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, And Strategies*. London: Pearson-Viacom Company.
- Thomas, David. (2001). *Modern Geometry*. Montana: Pasific Grove Brooks/Cole.
- Walle, John. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Virginia: Pearson Prentice Hall.
- Windayana, H., Haki, O., Supriadi. (2008). *Geometri dan Pengukuran*. Bandung: UPI Press.
- Walle, John. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Virginia: Pearson Prentice Hall.

Modul Belajar Mandiri

CALON GURU

Aparatur Sipil Negara (ASN)
Pegawai Pemerintah dengan Perjanjian Kerja (PPPK)